মোস্তফা আনোয়ার স্বপন

বীজগণিতঃ লজিক গেইটের জন্য

(পূর্ব প্রকাশিতের পর)

বুলিয়ান বীজগণিতের মূলনীতিঃ ধারণা করি, সংখ্যা গণনায় কিংবা ইনপুট আউটপুটের মান নির্ধারণে কেবল বাইনারী ০ এবং ১ ধরে এবং যৌক্তিক অর (+), এন্ড (.) ও ইনভার্শন বা উল্টানোর (–) অপারেশন বিবেচনায় রেখে গোটা বুলিয়ান বীজগণিতকে সহজে সংগঠিত করতে হাতে গোনা কয়েকটি মূলনীতি মনে রাখলেই চলবে। নিচের ছকে (ছকঃ ১) ১৯টি মূলনীতি সাজানো হয়েছে। এরকম অবশ্য অসংখ্য বুলিয়ান বীজগাণিতিক অভেদাবলী পাওয়া সম্ভব। কিন্তু, এ কয়টিই জর্জ বুলির আদি স্বীকার্য। সম্পর্কগুলো বুঝতে যা খেয়াল রাখতে হবে তা হলো যেমন, A এর মান যদি ০ না হয় তবে অবশ্যই ১ হবে। কিংবা যদি ১ না হয় তবে অবশ্য অবশ্যই ০। আর চেনা সেই তিনটি যৌক্তিক অপারেশন ভুলে গেলে চলবে না। আসুন, বরং আরেকবার এক নজরে অপারেশনগুলো দেখে নিই।

অর অপারেশন	এন্ড অপারেশন	ইনভার্শন
০ + ০ = ০	০.০ = ০	$\overline{০}$ = ১
০ + ১ = ১	০.১ = ০	$\overline{১}$ = ০
১ + ০ = ১	১.০ = ০	$\overline{\overline{১}}$ = ১
১ + ১ = ১	১.১ = ১	

ছকের সম্পর্কে এ অপারেশন কটি খাটিয়ে স্বীকার্যগুলোর যথার্থতা প্রমাণ করা কঠিন নয়।

১. ০+A=A	১১. A.B=B.A
২. ১+A=১	১২. A+(B+C)=(A+B)+C
৩. A+A=A	১৩. A(BC)=(AB)C
৪. A+$\overline{A}$=১	১৪. A(B+C)=AB+AC
৫. ০.A=০	১৫. A+AC=A
৬. ১.A=A	১৬. A(A+B)=A
৭. A.A=A	১৭. (A+B)(A+C)=A+BC
৮. A.$\overline{A}$=০	১৮. A+$\overline{A}$B=A+B
৯. $\overline{\overline{A}}$=A	১৯. AB+BC+$\overline{B}$C=AB+C
১০. A+B=B+A	

ছক ঃ ১

ধরুন, ৩নং সম্পর্কটি যাচাই করব। ইনপুট চলরাশি বা ভেরিয়েবল A কেবল ০ কিংবা ১ হতে পারে। যদি A এর মান ০ হয় তবে ০ + ০ = ০। আবার যদি A এর মান ১ হয় তবে ১+১=১ (উচ্চারন ১ অর (OR) ১ সমান ১)। সুতরাং নিশ্চিত হলাম A+A=A (উচ্চারণ A অর A সমান A)। এভাবে একে একে সব সম্পর্কগুলো যাচাই করা সম্ভব। আরেকটি ব্যাপার লক্ষ্য করুন ৯নং সম্পর্কে। ওটির তাৎপর্য হলো পরপর দুবার ইনভার্শন বা উল্টানোতে মূল মানই ফিরে আসে। যদি A=0 হয়, তবে প্রথম বার ইনভার্শনে মান উল্টে ১ হলো। দ্বিতীয় ইনভার্শনে ১ উল্টে আবার আদি মান ০ শূন্যে পরিণত হলো। অর্থাৎ $\overline{\overline{A}}$ = A। ১৪নং সম্পর্কটি বন্টননীতি বলে পরিচিত। এটিকে সম্প্রসারিত করাও অসম্ভব নয়। ধরুন, দুটো যৌক্তিক অর (+) (A+B) এবং (C+D) এর মাঝে যৌক্তিক গুনন বা এন্ড করতে হবে। সে ক্ষেত্রে একটি অর (+) কে একক পদ ধরে অন্য + টির প্রতিটি পদের সাথে আলাদা আলাদাভাবে যৌক্তিক এন্ড বা গুন করতে হয়। প্রাপ্ত ফলাফলকে বন্টননীতিতে সাজিয়ে নেয়া যেতে পারে। যেমন, (A+B) (C+D)=A(C+D)+B(C+D) = AC+AD+BC+BD এ আলোকে এবার ১৭ নং সম্পর্কটি কী করে এলো তা একটু দেখা যাক।

(A+B)(A+C) = AA+AC+BA+BC
= A+AC+AB+BC (সূত্র ৭ ঃ AA=A)
= A(১+C)+B(A+C)
= A.১+B (A+C) (সূত্র ২ ঃ ১+C=১
= A + BA + BC
= A(১+B)+BC
= A.১+BC (সূত্র ঃ ২)
= A+BC
(A+B) (A+C) = A +BC (প্রমানিত)

সত্যমিথ্যা ছকে A,B এবং C কে তিনটি ইনপুটের বিভিন্ন অবস্থা ০ এবং ১ নিয়ে বিবেচনা করে আউটপুটকে ডানপক্ষের সাথে তুলনা করলেই উপপাদ্যটির সত্যতা প্রমানিত হবে। কমপিউটার জগৎ গত সংখ্যায় আমরা-এ কায়দাটি রপ্ত করেছি। আবার ১৫ এবং ১৬ নং নীতি দুটো কিন্তু সাধারণ বীজ গণিতে বোঝা অসম্ভব। বুলিয়ান বীজগণিতে এ দুটোর প্রমান সহজ ঃ

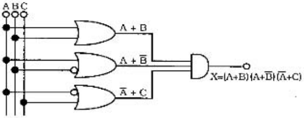
A+AC = A (১+C)
= A.১ (সূত্র ঃ ২ খাটিয়ে)
= A
∴ A+AC = A (প্রমাণিত)
এবং A(A+B) = AA+AB (বন্টন সূত্র ঃ ১৪)
= A+AB (সূত্র ৭ ঃ AA=A)
= A(১+B)
= A.১ (সূত্র ঃ ২)
∴ A(A+B) = A(প্রমাণিত)

দ্য মরগানের উপপাদ্য ঃ বুলিয়ান বীজগণিতে যৌক্তিক নর (NOR) এবং যৌক্তিক ন্যান্ড (NAND) অপারেশনকে যথাক্রমে সরল যৌক্তিক এন্ড এবং অর এ রূপান্তরের জন্য দুটো অত্যন্ত প্রয়োজনীয় উপপাদ্য রয়েছে। প্রথমটি হলো $\overline{(A+B)}=\overline{A}.\overline{B}$ (নর থেকে এন্ড) এবং দ্বিতীয়টি হলো $\overline{(A.B)}=\overline{A}+\overline{B}$ (ন্যান্ড থেকে অর)। এগুলো দ্য মরগানের সূত্র নামে পরিচিত।

সরলকরণ ঃ গত সংখ্যায় যেমনটা বলেছিলাম একটি জটিল বীজগাণিতিক প্রকাশকে লজিক গেইটের মাধ্যমে বাস্তবায়নে বহু সংখ্যক গেইটের তথা সুইচের প্রয়োজন হয়ে পড়ে। পক্ষান্তরে সারলীকৃত প্রকাশের বর্তনী সংগঠন সহজ। এতে করে কমপিউটারের অভ্যন্তরীণ মূল মাইক্রোপ্রসেসর তৈরির খরচ জটিল-সরল বর্তনী সমন্বয় ভেদে যথাক্রমে বেশী কিংবা কম হয়। সে কারণেই জটিল বীজগাণিতিক প্রকাশকে সরল প্রকাশে রূপান্তরকরণ এতো জরুরী। ওপরে বর্ণিত মূলনীতি কটি এবং দ্য মরগানের উপপাদ্য দুটি খাটিয়েই এ গুরুত্বপূর্ণ কাজটি সম্পন্ন করা হয়ে থাকে। এবার তাহলে একটি উদাহরণ দিয়ে সরল করণের কায়দাটি বুঝে নেয়া যাক। ধরুন, বীজগানিতিক প্রকাশটি এমন–

$$(A+B)\ (A+\overline{B})\ (\overline{A}+C) = X$$

তিনটি ইনপুট A,B ও C এবং একটি আউটপুট X সমৃদ্ধ এই প্রকাশটিকে যৌক্তিক গেইটে বাস্তবায়ন করা যায় এভাবে,



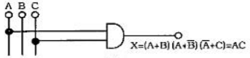
চিত্র ঃ ১

সরল করলে পাওয়া যাবে,

(A+B) (A+$\overline{B}$) ($\overline{A}$+C) = AA+A$\overline{B}$+AB+B$\overline{B}$)($\overline{A}$+C)
~~A + A$\overline{B}$ + AB + 0) ($\overline{A}$ + C)~~
(সূত্র ৭ ঃ AA = A সূত্র ৮ ঃ B$\overline{B}$ =0)
= (A + A$\overline{B}$ + AB) ($\overline{A}$ + C)
= {A(১ +$\overline{B}$) + AB}($\overline{A}$+C)
= (A.১+AB)($\overline{A}$+C) (সূত্র ২ ঃ ১+$\overline{B}$ =১)
= A(১+B)($\overline{A}$+C)
= A.১($\overline{A}$+C)
= A($\overline{A}$+C)
= A$\overline{A}$+AC
= 0+AC=AC

অর্থাৎ, (A+B)(A+$\overline{B}$)($\overline{A}$+C) = AC ঃ

অর লজিক গেইটে দেখানো যায় এভাবে,



চিত্র ঃ ২

তার মানে চিত্র ঃ২ই হচ্ছে জটিল বীজগাণিতিক প্রকাশটির সরল রূপের লজিক গেইটে বাস্তবায়ন এবং চিত্র ঃ ১ এর সমতুল্য বর্তনী। দুটো বর্তনী মূলতঃ একই কাজ করতে সক্ষম। সত্যমিথ্যা ছকেও এসবের যথার্থতা যাচাই করে দেখতে পারেন।

কী হবে বীজগাণিতিক প্রকাশটি ? বীজ গাণিতিক প্রকাশ দেয়া থাকলে ইনপুট আউটপুটের দশা কী হবে কিংবা লজিক গেইট দিয়ে বর্তনী বাস্তবায়ন কীভাবে করা যায় সে তা না হয় জানা গেলো। কিন্তু কেবল ইনপুটের বিভিন্নদশা আর ওগুলোর সাপেক্ষে আউটপুটের দশা জেনেই গোটা বীজগাণিতিক প্রকাশটির অর্থাৎ ইনপুট আউটপুটের মাঝে বিরাজমান গুপ্ত রহস্যের শৃঙ্খলাটি উদ্ধারের উপায় কি? এতো পাটিগণিতের অংকের ফল দেখেই অংক বলে দেয়া (!) হলে গেলো। হ্যাঁ উপায় আছে। বেশ কয়েকটি। মাইক্রোপ্রসেসর ডিজাইনার বস্তুতঃ এ কাজই করেন। আমরা একটি সহজ উপায় শিখবো উদাহরণ আলোচনা করে। ধরুন, তিনটি ইনপুটের বিভিন্ন দশা ও তাদের জন্য আউটপুটের একটি সেট (ছক ঃ২)এ দেয়া আছে। বীজগাণিতিক প্রকাশটি খুঁজে বার করতে এবং বর্তনীতে বাস্তবায়িত করতে হবে। তিনটি ধাপে একাজ করা যায়।

ইনপুট			আউটপুট
যখন A=0	B=0	C=0	তখন X=1
০	০	১	০
০	১	০	১
০	১	১	০
১	০	০	১
১	০	১	০
১	১	০	১
১	১	১	০

ছক ঃ ২

ধাপ ১ ঃ একটি সত্য মিথ্যা ছকে সাজানো হলো (ছক ঃ ৩)

ধাপ ২ ঃ ইনপুট যেমন ১ এর জন্য A এবং 0 এর জন্য $\bar{A}$ ইত্যাদি ধরে তিনটি ইনপুটের A, B, C এর গুণফল এই ছকে একটি অতিরিক্ত কলামে সন্নিবিষ্ট করা হলো (ছক ঃ৩)। প্রতিটি সারিতে এভাবে একটি গুণনজাত পদ (product term) পাওয়া যাবে।

ধাপ ৩ ঃ কেবল আউটপুট ১ বিশিষ্ট সারি থেকে গুণনজাত পদসমূহ ($\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, $\bar{A}B\bar{C}$, $A\bar{B}\bar{C}$, $AB\bar{C}$) সংগ্রহ করি। যৌক্তিক অর (+) দিয়ে এই পদগুলোকে যুক্ত করলেই এইটিই হবে আমাদের কাঙ্খিত বুলিয়ান বীজগাণিতিক প্রকাশটির সম্পূর্ণ রূপ।

ইনপুট			আউটপুট	গুণনজাত
A	B	C	X	পদসমূহ
০	০	০	১	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
০	০	১	০	$\bar{A}\bar{B}C$
০	১	০	১	$\bar{A}B\bar{C}$
০	১	১	০	$\bar{A}BC$
১	০	০	১	$A\bar{B}\bar{C}$
১	০	১	০	$A\bar{B}C$
১	১	০	১	$AB\bar{C}$
১	১	১	০	ABC

ছক ঃ ৩

সুবিধামত বর্ণিত মৌলনীতি এবং দ্য মরগানের উপপাদ্য খাটিয়ে এই প্রকাশটিকে সরল করা এবং লজিক গেইটের বর্তনীতে বাস্তবায়ন সম্ভব।

আমাদের উদাহরণে কাঙ্খিত বীজগাণিতিক প্রকাশটি হবে,

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+AB\bar{C} = X$।

এটি সরল করা যাবে এভাবে,

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+AB\bar{C} = X$

বা, $\bar{A}(\bar{B}\bar{C}+B\bar{C})+A(\bar{B}\bar{C}+B\bar{C})=X$

বা, $\bar{A}[\bar{C}(\bar{B}+B)]+A[\bar{C}(\bar{B}+B)]=X$

বা, $\bar{A}(\bar{C}.1)+A(\bar{C}.1)=X$ কেননা, $\bar{B}+B=১$ (সূত্র ঃ ৪)

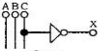
বা, $\bar{A}\bar{C}+A\bar{C}=X$

বা, $\bar{C}(\bar{A}+A)=X$

বা, $\bar{C}=X$, অর্থাৎ, $\bar{A}+A=১$ (সূত্র ঃ ৪)

অর্থাৎ সামগ্রিক বিচারে সরল বীজগাণিতিক প্রকাশটি হলো $\bar{C}=X$

যৌক্তিক গেইটের বর্তনীতে হবে চিত্র ঃ৩ এর অনুরূপ। একটু ভিন্ন কায়দায় ঠিক এই উদ্দেশ্যইটিই হাসিল করা যায়। তার একটি উদাহরণ দিয়ে আমরা এ পর্যায়ের আলোচনা শেষ করবো। তিনটি ইনপুটের সম্ভাব্য ($২^৩$) আটটি দশার জন্য আউটপুটগুলো ছক ঃ৪ এ সাজানো আছে। উদ্দেশ্য, বীজগাণিতিক প্রকাশ খুঁজে বের করা। এবারও একটি সত্যমিথ্যার ছকে সাজিয়ে সাথে একটি অতিরিক্ত কলাম যুক্ত করলাম। তবে কলামে রক্ষিত পদগুলোর চেহারা ভিন্ন। এখানে একেকটি সারির ইনপুটগুলোর মাঝে অর (+) অপারেশন করে যৌক্তিক যোগপদ গ্রহণ করা হয়েছে। তবে এক্ষেত্রে আগের ঠিক বিপরীতক্রমে যেমন A ইনপুটের 0 এর জন্য A এবং ১ এর জন্য $\bar{A}$ নির্ধারণ করা হয়েছে। আর সংগ্রহ করা হয়েছে যে সব সারির আউটপুট 0 কেবল ওই সব সারির যোগপদগুলো। এবং অবশেষে কাংখিত বীজগাণিতিক প্রকাশটি পাওয়া যায় এসব যৌক্তিক যোগজ পদগুলোর মধ্যে যৌক্তিক এন্ড অপারেশনের পর।



চিত্র ঃ ৩

ইনপুট			আউটপুট	গুণনজাত পদসমূহ	যোগজ পদসমূহ
A	B	C	X		
০	০	০	০	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$A+B+C$
০	০	১	০	$\bar{A}\bar{B}C$	$A+B+\bar{C}$
০	১	০	১	$\bar{A}B\bar{C}$	$A+\bar{B}+C$
০	১	১	১	$\bar{A}BC$	$A+\bar{B}+\bar{C}$
১	০	০	০	$A\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}+B+C$
১	০	১	০	$A\bar{B}C$	$\bar{A}+B+\bar{C}$
১	১	০	১	$AB\bar{C}$	$\bar{A}+\bar{B}+C$
১	১	১	০	ABC	$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$

ছক ঃ ৪

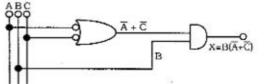
ছক ঃ ৪ এ সজ্জিত ০ আউটপুট বিশিষ্ট যোগজপদগুলো পাই $(A+B+C)$, $(A+B+\bar{C})$, $(\bar{A}+B+C)$, $(\bar{A}+B+\bar{C})$ এবং $(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$ তাহলে বীজগাণিতিক প্রকাশটি হবে,

$(A+B+C)(A+B+\bar{C})(\bar{A}+B+C)(\bar{A}+B+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}) =X$।

সরল করে পাওয়া যায় $(A+B)(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{C})=X$

বা, $B(\bar{A}+\bar{C})=X$

আর লজিক গেইট দিয়ে দেখালে চিত্র-৪ এর অনুরূপ বর্তনীটি কাংখিত গাণিতিক কার্য সম্পাদনক্ষম।



চিত্র -৪

ইনপুট আউটপুট জেনে বুলিয়ান বীজ গাণিতিক সম্পর্কের রহস্যজাল উদঘাটনের এ ছাড়াও রয়েছে কারনোর ম্যাপ (Karnaugh map) বা K-map পদ্ধতি। কমপিউটার মাইক্রোপ্রসেসর তথা ডিজিটাল মাইক্রোচিপ ডিজাইনের আধুনিক উচ্চতর সব কলাকৌশলই মূলতঃ আলোচিত এই সরল বীজগাণিতিক শৃংখলার ক্রমোন্নতরূপ মাত্র।

(শেষ)