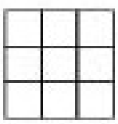
গণিতের অলিগলি

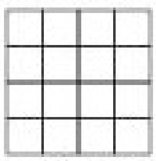
জাদুর বর্গ

জাদুর বর্গ। ইংরেজি ভাষায় এর নাম ম্যাজিক স্কয়ার। চীনারা এই জাদুর বর্গের সাথে পরিচিত খ্রিস্টপূর্ব ৬৫০ সাল থেকে। আরবরা সম্ভবত ম্যাজিক স্কয়ার সম্পর্কে জানতে পারে সপ্তম শতাব্দীতে। যখন আরবরা ভারতীয় উপমহাদেশের উত্তর-পূর্বাঞ্চল জয় করে নেয়, তখন আরবরা ভারতীয় গণিতের সাথে পরিচয় লাভ করে। ৫ ও ৬ অর্ডারের ম্যাজিক স্কয়ার বাগদাদের একটি বিশ্বকোষে ছাপা হয় ৯৮৩ খ্রিস্টাব্দে। সাধারণ কিছু ম্যাজিক স্কয়ার সম্পর্কে আরবরা আরো অনেক আগেই জানত। প্রশ্ন হচ্ছে, এই জাদুর বর্গ বা ম্যাজিক স্কয়ার আসলে কী?

আমরা একটি বর্গক্ষেত্রকে ৪টি সমান ছোট বর্গক্ষেত্র, ৯টি সমান ছোট বর্গক্ষেত্র, ১৬টি সমান ছোট বর্গক্ষেত্র, ২৫টি সমান বর্গক্ষেত্র, ... ইত্যাদিতে ভাগ করতে পারি। তবে জাদুর বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রে কমপক্ষে ৯টি বর্গক্ষেত্রে ভাগ করার বিষয়টি প্রযোজ্য। নিচে আঁকা বর্গক্ষেত্র দু'টির কথাই ধরা যাক। এখানে প্রথম বর্গক্ষেত্রটিকে সমান ৯টি বর্গক্ষেত্রে ভাগ করা হয়েছে। এর যেকোনো একটি সারিতে রয়েছে ৩টি করে বর্গক্ষেত্র। আর দ্বিতীয় বর্গক্ষেত্রটি সমান ১৬টি বর্গক্ষেত্রে ভাগ করা হয়েছে। এর যেকোনো একটি সারিতে রয়েছে ৪টি করে ঘর। প্রথম বর্গক্ষেত্রটির এক সারিতে ৩টি ঘর থাকায় প্রথমটির ক্ষেত্রে অর্ডার নম্বর হচ্ছে ৩। আর দ্বিতীয়টির প্রতি সারিতে ৪টি করে ঘর থাকায় আমরা বলব এর অর্ডার নম্বর ৪। এভাবে যে বর্গক্ষেত্রের এভাবে এক সারিতে যতটি ছোট বর্গক্ষেত্র থাকবে, সেটির অর্ডার নম্বর হবে তত। যেমন ২৫টি ছোট বর্গক্ষেত্রওয়ালা বর্গক্ষেত্রের অর্ডার নম্বর হবে ৫; কারণ এর প্রতি সারিতে থাকবে ৫টি ছোট বর্গক্ষেত্র।



বর্গক্ষেত্র : ১



বর্গক্ষেত্র : ২

এবার আমরা প্রথম বর্গক্ষেত্রটির ৯টি ঘরে ১ থেকে ৯ পর্যন্ত সংখ্যাগুলো এমনভাবে বসাই, যাতে এর যেকোনো এক সারির সংখ্যাগুলো যোগ করলে যোগফল যেনো ১৫ হয়। তাহলে আমরা পাই পাশে নিচের প্রথম বর্গক্ষেত্রটি। এই সারি কোনাকুনিভাবেও ধরা যেতে পারে আনুভূমিক বা খাড়া আনুলম্বিকভাবেও উপর-নিচ হতে পারে।

৮	১	৬	→ ১৫
৩	৫	৭	→ ১৫
৪	৯	২	→ ১৫
↓ ১৫	↓ ১৫	↓ ১৫	↘ ১৫

প্রথম জাদুর বর্গক্ষেত্র

৪	১৪	১৫	১	→ ৩৪
৯	৭	৬	১২	→ ৩৪
৫	১১	১০	৮	→ ৩৪
১৬	২	৩	১৩	→ ৩৪
↓ ৩৪	↓ ৩৪	↓ ৩৪	↓ ৩৪	↘ ৩৪

দ্বিতীয় জাদুর বর্গক্ষেত্র

এখন আমরা যদি ২ নম্বর বর্গক্ষেত্রের ১৬টি ঘরে ১ থেকে ১৬ পর্যন্ত ষোলটি সংখ্যা এমনভাবে বসাই যে এর প্রতি সারির ৪টি সংখ্যার যোগফল সবসময় ৩৪ হয়। তাহলে আমরা পাব দ্বিতীয় জাদুর বর্গক্ষেত্রটি।

উপরের প্রথম জাদুর বর্গটির যেকোনো সারির (খাঁড়া উপর-নিচে, ডানে-বামে ও কোনাকুনি ৩টি ঘরের সংখ্যাগুলোর যোগফল ১৫। এই ১৫ সংখ্যাটি হচ্ছে প্রথম জাদুর বর্গের জাদুর ধ্রুবক বা ম্যাজিক কনস্ট্যান্ট। আর দ্বিতীয় জাদুর বর্গের যেকোনো সারির ৪টি ঘরের সংখ্যাগুলোর যোগফল ৩৪। এই ৩৪ হচ্ছে দ্বিতীয় জাদুর বর্গের জাদুর ধ্রুবক বা ম্যাজিক কনস্ট্যান্ট।

এভাবে আমরা যদি ২৫ ঘরবিশিষ্ট তৃতীয় আরেকটি জাদুর বর্গ তৈরি করি, তবে এর প্রতি সারিতে থাকবে ৫টি করে ঘর। আর বর্গক্ষেত্রটির ২৫টি ঘরে ১ থেকে ২৫ পর্যন্ত সংখ্যাগুলো এমনভাবে বসাই যাতে এর প্রতি সারির ৫টি ঘরের সংখ্যাগুলোর যোগফল একই হয়, তবে এই যোগফল হবে ৬৫। এক্ষেত্রে ৬৫ হবে এ জাদুর বর্গক্ষেত্রের ম্যাজিক কনস্ট্যান্ট আর এটি হবে ৫ অর্ডারের একটি জাদুর বর্গ। নিচের তৃতীয় বর্গক্ষেত্রটি দেখুন।

১১	২৪	৭	২০	৩	→ ৬৫
৪	১২	২৫	৮	১৬	→ ৬৫
১৭	৫	১৩	২১	৯	→ ৬৫
১০	১৮	১	১৪	২২	→ ৬৫
২৩	৬	১৯	২	১৫	→ ৬৫
↓ ৬৫	↓ ৬৫	↓ ৬৫	↓ ৬৫	↓ ৬৫	↘ ৬৫

তৃতীয় জাদুর বর্গক্ষেত্র

তাহলে আমরা দেখলাম উপরে উল্লিখিত প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় জাদুর বর্গ তিনটির অর্ডার হচ্ছে যথাক্রমে ৩, ৪ ও ৫। আগেই বলা হয়েছে ৩-এর চেয়ে কম অর্ডারের কোনো জাদুর বর্গ হয় না। এই জাদুর বর্গের এই অর্ডার সংখ্যাকে n সঙ্কেত দিয়ে বুঝালে n = ৩, ৪, ৫, ...। এই অর্ডার নাম্বার n জানা থাকলে ম্যাজিক কনস্ট্যান্ট M নির্ণয় করা যায়। এর জন্য আমাদের একটি সূত্র রয়েছে। সূত্রটি হচ্ছে :

$$M = n(n^2+1) \div 2$$

লক্ষণীয়, উপরে উল্লিখিত প্রথম জাদুর বর্গটির অর্ডার নম্বর ৩। অর্থাৎ n = 3, অতএব এর ম্যাজিক কনস্ট্যান্ট বা জাদুর ধ্রুবসংখ্যা :

$$\begin{aligned} M &= n(n^2+1) \div 2 \\ &= 3(3^2+1) \div 2 \\ &= 3(9+1) \div 2 \\ &= (3 \times 10) \div 2 \\ &= 15 \end{aligned}$$

আর ৪ অর্ডারের দ্বিতীয় জাদুর বর্গটির ক্ষেত্রে n = 4, অতএব এর ম্যাজিক কনস্ট্যান্ট

$$\begin{aligned} M &= n(n^2+1) \div 2 \\ &= 4(4^2+1) \div 2 \\ &= 4(16+1) \div 2 \\ &= (4 \times 17) \div 2 \\ &= 34 \end{aligned}$$

আর ৫ অর্ডারের তৃতীয় জাদুর বর্গটির ম্যাজিক কনস্ট্যান্ট

$$\begin{aligned} M &= n(n^2+1) \div 2 \\ &= 5(5^2+1) \div 2 \\ &= (5 \times 26) \div 2 \\ &= 65 \end{aligned}$$

একইভাবে ৬ অর্ডারের জাদুর বর্গের ক্ষেত্রে ম্যাজিক কনস্ট্যান্ট

$$\begin{aligned} M &= 6(6^2+1) \div 2 \\ &= (6 \times 3) \div 2 \\ &= 111 \end{aligned}$$

২	৭	৬	→ ১৫
৯	৫	১	→ ১৫
৪	৩	৮	→ ১৫
↓ ১৫	↓ ১৫	↓ ১৫	↘ ১৫

চতুর্থ জাদুর বর্গ

একটি বিষয় এখানে সবিশেষ লক্ষণীয়। উপরে উল্লিখিত ৩ অর্ডারের জাদুর বর্গটি গঠন করতে পারি এর বিভিন্ন সংখ্যা একটু পাল্টে দিয়েও। তখন এ ম্যাজিক স্কয়ারটি হতে পারে এমন :

লক্ষণীয়, প্রথম জাদুর বর্গের মতোই এই চতুর্থ জাদুর বর্গের অর্ডার ৩, ম্যাজিক কনস্ট্যান্ট ১৫। কিন্তু প্রথম ও চতুর্থ জাদুর বর্গের সংখ্যাগুলোর বসানোর মধ্যে পার্থক্য রয়েছে। তাহলে বোঝা গেল, সমান অর্ডার ও সমান ম্যাজিক কনস্ট্যান্টওয়ালা জাদুর বর্গের বিভিন্ন সমাধান রয়েছে। আমরা দেখলাম, ৩ অর্ডার ও ১৫ ম্যাজিক কনস্ট্যান্টবিশিষ্ট জাদুর বর্গ রয়েছে দু'টি। ৪ অর্ডারের জাদুর বর্গের জন্য আছে ৮৮০টি সমাধান। তেমনি ৫ অর্ডারের জাদুর বর্গের সমাধান রয়েছে ২৭৫৩০৫২২৪টি। আর ৬ অর্ডারের সমাধান রয়েছে অভাবনীয় সংখ্যক।

ম্যাজিক স্কয়ার গঠন করার কিছু নিয়ম রয়েছে। স্থানাভাবে তা এখানে আলোচনা করা গেল না। ভবিষ্যতে কোনো লেখায় তা আলোচনার প্রত্যাশা রইল।

গণিতদাদু