# গণিতের অলিগলি

পর্ব : ৮৪

## সংখ্যা ২২: একটি মজা

বীজগণিত ব্যবহার করেও আমরা সংখ্যার নানা ধরনের মজা আবিষ্কার করতে পারি। তেমনি একটি মজা এখন আমরা জানব। ধরা যাক, আমরা তিন অঙ্কের এমন একটি সংখ্যা নিলাম, যার প্রতিটি অঙ্ক ভিন্ন ভিন্ন। একটির সাথে আরেকটির মিল নেই। এখন আমরা চাইলে এই তিন অঙ্ক থেকে যেকোনো দুইটি অঙ্ক নিয়ে দুই অঙ্কের সর্বোচ্চ ছয়টি সংখ্যা তৈরি করতে পারি। এই ছয়টি সংখ্যার যোগফলকে যদি প্রথমে নেয়া অঙ্ক তিনটির যোগফল দিয়ে ভাগ করি, তবে সব সময় ভাগফল পাব ২২। কী, বিষয়টি মজার নয় কি?

বিষয়টি স্পষ্ট করার জন্য একটি উদাহরণ দেয়া যাক। ধরা যাক, ভিন্ন ভিন্ন তিনটি অঙ্ক নিয়ে আমরা যে সংখ্যা গঠন করেছিলাম, সেটি ছিল ৩৬৫। এখন এর যেকোনো দুইটি অঙ্ক নিয়ে আমরা দুই অঙ্কের সর্বোচ্চ ছয়টি সংখ্যা গঠন করতে পারি। এ সংখ্যাগুলো হলো : ৩৬, ৩৫, ৬৫, ৬৩, ৫৩ ও ৫৬। এই সংখ্যা ছয়টির যোগফল ৩০৮। এবং প্রথমে নেয়া মূল সংখ্যাটির অঙ্ক তিনটির যোগফল = ৩ + ৬ + ৫ = ১৪। এবার ৩০৮-কে এই ১৪ দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল হয় ২২।

এভাবে ভিন্ন ভিন্ন অঙ্কের যেকোনো তিন অঙ্কের সংখ্যা নিলেও আমরা সব সময় শেষ পর্যন্ত এই ২২ সংখ্যাটিই পাব। কেনো সর্বশেষ ভাগফলটি ২২ হয়, তা আমরা স্কুলের বীজগণিতের জ্ঞান ব্যবহার করেই বুঝতে পারব।

বিষয়টি ব্যাখ্যার জন্য ধরি, প্রথমে যে তিন অঙ্কের সংখ্যাটি নিই, সেটির শতকের ঘরের অঙ্ক ক, দশকের ঘরের অঙ্ক খ এবং এককের ঘরের অঙ্ক গ। তাহলে এই সংখ্যাটি হবে = ১০০ক + ১০খ + ১গ। এরপর দুইটি অঙ্ক নিয়ে যে ছয়টি দুই অঙ্কের সংখ্যা তৈরি করব সেগুলো হবে যথাক্রমে (১০ক + ১খ), (১০খ + ১ক), (১০খ + ১গ), (১০গ + ১খ), (১০গ + ১ক) এবং (১০ক + ১গ)। এবং এই সংখ্যা ছয়টির যোগফল = (১০ক + ১খ) + (১০খ + ১ক) + (১০খ + ১গ) + (১০গ + ১ক) + (১০গ + ১ক) + (১০ক + ১গ) = ২২ক + ২২খ + ২২গ = ২২ (ক + খ + গ)।

অর্থাৎ সংখ্যা ছয়টির সমষ্টি প্রথমে নেয়া অঙ্ক তিনটির সমষ্টির ২২ গুণ। এজন্যই সর্বশেষ ভাগফল আমরা সব সময় ২২ পাই।

তবে সবশেষে একটা কথা মনে করিয়ে দেই, প্রথমে নেয়া অঙ্ক তিনটির কোনোটি শূন্য (০) হলে এই নিয়ম খাটবে না।

এভাবে বীজগণিতের জ্ঞান ব্যবহার করে সংখ্যার আরেকটি মজার বিষয় আমরা জানতে পারি। আর এই মজাটি হচ্ছে, আমরা যদি যেকোনো তিনটি ক্রমিক বিজোড় সংখ্যা নিয়ে এগুলোর বর্গের সমষ্টির সাথে ১ যোগ করি, তবে যে সংখ্যা পাওয়া যাবে, তা সব সময় ১২ দিয়ে নিঃশেষে ভাগ করা যাবে।

একটি উদাহরণ দিই। ধরা যাক, ক্রমিক তিনটি বিজোড় সংখ্যা নেয়া হলো ৩, ৫ ও ৭। এগুলোর বর্গের সমষ্টির সাথে ১ যোগ করলে আমরা যে সংখ্যাটি পাই তা হলো $৩^২ + ৫^২ + ৭^২ + ১ = ৯ + ২৫ + ৪৯ + ১ = ৮৪$। সহজের বোঝা যায় এই ৮৪ সংখ্যাটি ১২ দিয়ে নিঃশেষে বিভাজ্য। এভাবে যেকোনো বড় তিনটি ক্রমিক বিজোড় সংখ্যা নিলেও দেখা যাবে ফল দাঁড়াবে একই। কেনো হবে সেটিও জানতে পারি বীজগণিতের জ্ঞান কাজে লাগিয়েই।

আমরা যদি ক-এর মান ১, ২, ৩, ৪, ৫, ... ইত্যাদি ধরি, তবে (২ক +১) হবে একটি বিজোড় সংখ্যা। ধরি আমরা যে তিনটি ক্রমিক সংখ্যা নিতে চাই এর মাঝখানের সংখ্যাটি (২ক + ১), তবে এর আগের ক্রমিক বিজোড় সংখ্যাটি হবে (২ক -১) এবং এর পরের ক্রমিক বিজোড় সংখ্যাটি হবে (২ক + ৩)। তাহলে এই ক্রমিক তিনটি সংখ্যার বর্গের সমষ্টির সাথে যোগ করলে যে সংখ্যাটি পাব সেটি হবে :

$$(২ক -১)^২ + (২ক + ১)^২ + (২ক + ৩)^২ + ১$$
$$= ৪ক^২ - \cancel{৪ক} + ১ + ৪ক^২ + \cancel{৪ক} + ১ + ৪ক^২ + ১২ক + ৯ + ১$$
$$= ১২ক^২ + ১২ক + ১২$$
$$= ১২ (ক^২ + ক + ১)$$
$$= ১২ \times \text{যেকোনো একটি সংখ্যা, যার মান} = ক^২ + ক + ১$$

$\therefore$ সর্বশেষ সংখ্যাটি সব সময় ১২ দিয়ে সহজেই নিঃশেষে বিভাজ্য হবে।

সুতরাং বীজগণিতের জ্ঞানকে কাজে লাগিয়ে আমরা সংখ্যার অনেক মজার মজার বিষয় জানতে পারব।

**ধরন দেখে সংখ্যাধারার সমষ্টি নির্ণয়**

বিভিন্ন সংখ্যাধারার যোগফল বের করার নিয়ম আমরা জানতে পারি স্কুলের উচ্চতর বীজগণিত পাঠ করে। কিন্তু এখানে একটি সংখ্যাধারার সমষ্টিফল বের করার বিষয়টি জানব, যার জন্য সে ধরনের বীজগণিতের কোনো জ্ঞানের প্রয়োজন হবে না, শুধু সংখ্যাধারাটির ধরন বা প্যাটার্ন দেখেই এর সমষ্টি বের করে দেখা যাবে।

ধরা যাক, আমরা নিচের সংখ্যাধারাটির যোগফল জানতে চাই :

$$\frac{১}{১\times২} + \frac{১}{২\times৩} + \frac{১}{৩\times৪} + \ldots + \frac{১}{৪৯\times৫০} = \quad ?$$

এখন লক্ষ করুন নিচের দৃশ্যমান ধরন বা প্যাটার্নটিতে :

$$\frac{১}{১\times২} = \frac{১}{২}$$
$$\frac{১}{১\times২} + \frac{১}{২\times৩} = \frac{২}{৩}$$
$$\frac{১}{১\times২} + \frac{১}{২\times৩} + \frac{১}{৩\times৪} = \frac{৩}{৪}$$
$$\frac{১}{১\times২} + \frac{১}{২\times৩} + \frac{১}{৩\times৪} + \frac{১}{৪\times৫} = \frac{৪}{৫}$$

এই প্যাটার্নটি লক্ষ করলে আমরা সহজেই ধরে নিতে পারি :

$$\frac{১}{১\times২} + \frac{১}{২\times৩} + \frac{১}{৩\times৪} \ldots + \frac{৩}{৪৯\times৫০} = \frac{৪৯}{৫০} \text{ এবং}$$
$$\frac{১}{১\times২} + \frac{১}{২\times৩} + \frac{১}{৩\times৪} \ldots + \frac{৩}{৮০\times৮১} = \frac{৮০}{৮১}$$

এ ধারাটির সমষ্টি আমরা আরেকটি প্যাটার্নে সাজিয়েও করতে পারি :

$$\frac{১}{১\times২} = \frac{১}{১} - \frac{১}{২}$$
$$\frac{১}{২\times৩} = \frac{১}{২} - \frac{১}{৩}$$
$$\frac{১}{৩\times৪} = \frac{১}{৩} - \frac{১}{৪}$$
$$\frac{১}{৪\times৫} = \frac{১}{৪} - \frac{১}{৫}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\frac{১}{৪৯\times৫০} = \frac{১}{৪৯} - \frac{১}{৫০}$$

$\therefore$ এগুলো যোগ করে পাই

$$\frac{১}{১\times২} + \frac{১}{২\times৩} + \frac{১}{৩\times৪} + \frac{১}{৪\times৫}$$
$$= \frac{১}{১} - \cancel{\frac{১}{২}} + \cancel{\frac{১}{২}} - \cancel{\frac{১}{৩}} + \cancel{\frac{১}{৩}} - \cancel{\frac{১}{৪}} + \cancel{\frac{১}{৪}} - \frac{১}{৫০}$$
$$= \frac{১}{১} - \frac{১}{৫০}$$
$$= \frac{৪৯}{৫০}$$

গণিতদাদু