

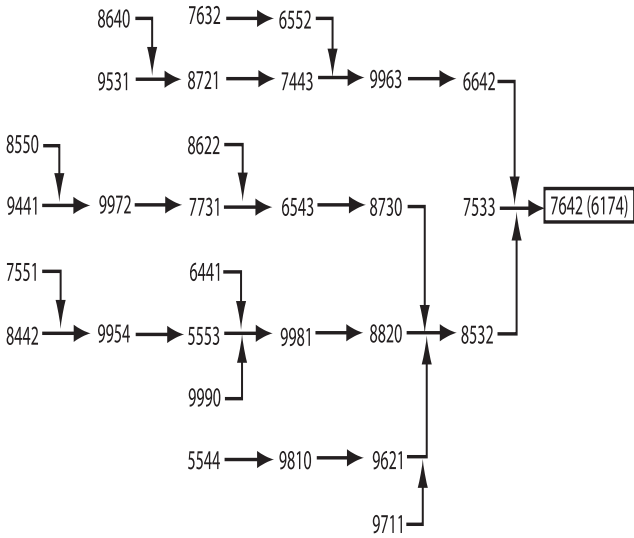
গণিতের অলিগলি

পর্ব : ৮৬

কাপরেকার অপারেশন ও কার্নেল : দ্বিতীয় পর্ব

নিচের চিত্র লক্ষ করুন উল্লিখিত ৩০টি সংখ্যা কিভাবে ৬১৭৪ সংখ্যাটিতে গিয়ে শেষ পর্যন্ত পৌঁছে। সর্বশেষ লক্ষণীয় এর একটি সংখ্যার ক্ষেত্রেও কাপরেকার অপারেশন সাত ধাপের বেশি চালাতে হয়নি।

এবার আমরা আমাদের এ ভাবনাকে আরো সম্প্রসারিত করি দুই অঙ্কের সংখ্যা, পাঁচ অঙ্কের সংখ্যা, ছয় অঙ্কের সংখ্যা কিংবা আরো বেশি অঙ্কের



সংখ্যার ক্ষেত্রে। দেখা যাক, ঘটনা এসব ক্ষেত্রে কী ঘটে। চার অঙ্কের সংখ্যা ও তিন অঙ্কের সংখ্যার ক্ষেত্রে কাপরেকার অপারেশন কী ফল শেষ পর্যন্ত দাঁড় করায় তা তো ইতোমধ্যেই আমরা জানলাম।

প্রথমে নিই একটি দুই অঙ্কের সংখ্যা। ধরা যাক সংখ্যাটি ২৮। তবে এক্ষেত্রে অপারেশনের ধাপগুলো হবে এমন :

$$\begin{aligned} 28 &: 22 - 28 = 58 \\ 58 &: 58 - 85 = 09 \\ 09 &: 90 - 09 = 81 \\ 81 &: 81 - 18 = 63 \\ 63 &: 63 - 36 = 27 \\ 27 &: 92 - 27 = 85 \\ 85 &: 58 - 85 = 09 \end{aligned}$$

আমরা যদি আরো সামনে যাই, তবে দেখা যাবে বিয়োগফলগুলো ধারাবাহিকভাবে বেশ কয়েকটি সংখ্যার মধ্যেই ঘুরপাক খেতে থাকবে। এক্ষেত্রে ০৯ → ৮১ → ৬৩ → ২৭ → ৪৫ → ০৯ ইত্যাদি সংখ্যা ঘুরেফিরে এসেছে। এক্ষেত্রে চার অঙ্কের কিংবা তিন অঙ্কের সংখ্যার মতো একটি মাত্র কার্নেল (৬১৭৪ কিংবা ৪৯৫) পাইনি। বরং এক্ষেত্রে আমরা পাই ০৯, ৮১, ৬, ২৭ ও ৪৫ এই পাঁচটি সংখ্যার একটি লুপ। অর্থাৎ বিয়োগফলগুলো ধারাবাহিকভাবে এ সংখ্যাগুলোর মধ্যে ঘুরতে থাকে। সংখ্যাটি নিয়ে অপারেশন শুরু করে আমরা তাই দেখলাম। নিচে দুই অঙ্কের অন্য আরেকটি সংখ্যা নিয়ে এই অপারেশন দেখুন কী ঘটনা ঘটে। ৫৭ ও ৩২ সংখ্যাটি দুটি নিয়ে অপারেশন চালালে বিয়োগফলগুলো হবে :

$$\begin{aligned} 57 &: 18 \rightarrow 63 \rightarrow 27 \rightarrow 85 \rightarrow 09 \rightarrow 81 \rightarrow 63 \\ 32 &: 09 \rightarrow 81 \rightarrow 63 \rightarrow 27 \rightarrow 85 \rightarrow 09 \end{aligned}$$

তাহলে দুই অঙ্কের সংখ্যার ক্ষেত্রে কোনো একক কার্নেল পাওয়া যায় না। আরেকটি মজার বিষয় হলো দুই অঙ্কের ক্ষেত্রে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম সংখ্যার প্রতিটি বিয়োগফলের অঙ্ক দুটির যোগফল সবসময় ৯ হয়।

এবার প্রশ্ন, পাঁচ অঙ্কের ক্ষেত্রে এই অপারেশন কী ফল বয়ে আনে? সেখানে কী ৬১৭৪ কিংবা ৪৯৫-এর মতো কোনো অনন্য একক কার্নেল পাওয়া যাবে? পাঁচ অঙ্কের ক্ষেত্রে কমপিউটার ব্যবহার করে হিসাব-নিকাশ করে দেখা গেছে, এক্ষেত্রে কাপরেকার অপারেশন চালিয়ে কোনো কার্নেল পাওয়া যায় না। বরং এর পরিবর্তে প্রতিটি পাঁচ অঙ্কের বেলায় ধাপগুলো নিচের তিনটি লুপের যেকোনো একটিতে পড়ে। অর্থাৎ বিয়োগফল নিম্নরূপে বারবার ঘুরেফিরে আসে।

প্রথম লুপ : ৭১৯৭৩ → ৮৩৯৫২ → ৭৪৯৪৩ → ৬২৯৬৪ → ৭১৯৭৩
দ্বিতীয় লুপ : ৭৫৯৩৩ → ৬৩৯৫৪ → ৬১৯৭৪ → ৮২৯৬২ → ৭৫৯৩৩
তৃতীয় লুপ : ৫৯৯৯৪ → ৯৩৯৫৫ → ৫৯৯৯৪

Malcolm Lines নামের জনৈক গণিতামুদে ব্যক্তিত্ব তার এক লেখায় উল্লেখ করেছেন, ছয় অঙ্কের সংখ্যা কিংবা তার চেয়েও বেশি অঙ্কের সংখ্যা নিয়ে কাপরেকার অপারেশন চালিয়ে কী ঘটে, তা পরীক্ষা করে দেখতে হলে প্রচুর সময়ের প্রয়োজন হবে। বিষয়টি করতে গেলে ধৈর্যহারা হওয়া ছাড়া আর কোনো উপায় নেই। আপনাকে সে পরিস্থিতির মুখোমুখি হওয়ার আগেই দুই অঙ্কের সংখ্যা থেকে দশ অঙ্কের সংখ্যার ক্ষেত্রে কোনটির কার্নেল কী, তা নিচের ছকের মাধ্যমে জানিয়ে দিতে চাই।

কয় অঙ্কের সংখ্যা	কার্নেল
দুই অঙ্কের	কার্নেল নেই
তিন অঙ্কের	৪৯৫
চার অঙ্কের	৬১৭৪
পাঁচ অঙ্কের	কার্নেল নেই
ছয় অঙ্কের	৫৪৯৯৪৫, ৬৩১৭৬৪
সাত অঙ্কের	কার্নেল নেই
আট অঙ্কের	৬৩৩১৭৬৬৪, ৯৭৫০৮৪২১
নয় অঙ্কের	৫৫৪৯৯৯৪৪৫, ৮৬৪১৯৭৫৩২
দশ অঙ্কের	৬৩৩৩১৭৬৬৬৪, ৯৭৫০৮৬৪২১, ৯৯৭৫০৮৪২০১

তাহলে আমরা দেখলাম চার অঙ্কের সংখ্যার ক্ষেত্রে কার্নেল ৬১৭৪ এবং তিন অঙ্কের সংখ্যার কার্নেল ৪৯৫। দুই অঙ্কের, পাঁচ অঙ্কের ও সাত অঙ্কের সংখ্যার ক্ষেত্রে কোনো কার্নেল নেই। আবার আট অঙ্কের ও নয় অঙ্কের সংখ্যার বেলায় কার্নেল রয়েছে দুটি করে এবং দশ অঙ্কের সংখ্যার বেলায় কার্নেল তিনটি; কিন্তু এখানে জানলাম না কেনো এই মজার ব্যাপারটি ঘটে, তার কোনো ব্যাখ্যা। এর কী কোনো গভীর গাণিতিক ব্যাখ্যা আছে? না এমনটি দৈবাৎ কোনো ঘটনার মতো কোনো অনুগামী ঘটনা? এ প্রশ্নের জবাব সাধারণ মানুষের পক্ষে বোঝা বা দেয়া কঠিন। এর জবাব যদি কোনো থাকে, তবে দেবেন গণিত গবেষকেরা। তবে কাপরেকার অপারেশন, কাপরেকার সংখ্যা ৬১৭৪ এবং বিভিন্ন অঙ্কের সংখ্যার কার্নেল যে একটি মজার বিষয় তা আমরা সাধারণ মানুষও বুঝতে পারি। এটি মজার গণিতের এক সুন্দর ক্ষেত্র। যেকোউ চাইলে এ লেখাটি মনোযোগ দিয়ে পড়লে সেই মজার্টুকু পাওয়া মোটেও কঠিন নয়।

সবশেষে আরেকটি ধাঁধা। আপনি কি এমন দুটি পাঁচ অঙ্কের সংখ্যা উল্লেখ করতে পারেন যেগুলো গুণ করলে গুণফল দাঁড়াবে ১২৩৪৫৬৭৮৯। আসলে এ ধরনের দুই জোড়া পাঁচ অঙ্কের সংখ্যার খোঁজ পাওয়া গেছে।

$$\begin{aligned} &10812 \\ &\times 11809 \\ \hline &123456789 \end{aligned}$$

এবং

$$\begin{aligned} &10806 \\ &\times 11808 \\ \hline &123456789 \end{aligned}$$

গণিতদাদু