গণিতের অলিগলি

পর্ব : ৮৮

হারমনিক মিন

ধরা যাক, আপনাকে বলা হলো, আপনি কোনো এক জায়গা থেকে যাত্রা শুরু করে অন্য একটি জায়গায় গেলেন ঘণ্টায় ৩০ মাইল বেগে। আর সেখান থেকে ফিরে এলেন ঘণ্টায় ৬০ মাইল বেগে। এখন প্রশ্ন হচ্ছে, আপনি এই যাতাযাতে গড়ে ঘণ্টায় কত মাইল বেগে চলেছেন। প্রথমত, আপনি হয়তো ভাববেন এর উত্তর খুবই সহজ। এখানে যাওয়া-আসায় গড় গতিবেগ হচ্ছে ঘণ্টায় ৪৫ মাইল। কারণ, (৩০ + ৬০) ÷ ২ = ৯০ ÷ ২ = ৪৫। স্কুল-কলেজের ছাত্রছাত্রীদের মধ্যে অনেকেই হয়তো মনে করবে এটাই সঠিক উত্তর। কিন্তু আসলে সঠিক উত্তরটা হবে এ ক্ষেত্রে প্রতিঘণ্টায় গড় বেগ হবে ৪০ মাইল। এ ক্ষেত্রে যা ঘটে, তার বাস্তব উদাহরণ দিলে সঠিক উত্তরটা জানতে-বুঝতে কারো পক্ষেই অসুবিধা হবে না।

লক্ষ করুন। এ ক্ষেত্রে বলা হয়েছে, যাওয়ার সময় ঘণ্টায় ৩০ মাইল বেগে এবং ফিরে আসার সময় ঘণ্টায় ৬০ মাইল বেগে চলতে হয়েছে। কিন্তু এই দুই জায়গার মধ্যে দূরত্ব কতটুকু ছিল তা নির্দিষ্ট করে বলা হয়নি। এই দূরত্ব সামান্য কয়েক মাইল থেকে কয়েক হাজার কিংবা কয়েক লাখ মাইল হতে পারে। শুধু শর্ত হচ্ছে, যেতে হবে ঘণ্টায় ৩০ মাইল বেগে এবং ফিরতে হবে ঘণ্টায় ৬০ মাইল বেগে। এখানে হিসাবটা সহজে করার জন্য ধরি দুই জায়গার মধ্যে দূরত্ব ৬০ মাইল। অতএব যাওয়ার সময় ঘণ্টায় ৩০ মাইল বেগে চলে গন্তব্যে যেতে সময় লাগবে ২ ঘণ্টা। আর সেখান থেকে ঘণ্টায় ৬০ মাইল বেগে ফিরে আসতে সময় লাগবে ১ ঘণ্টা। অতএব এ ক্ষেত্রে মোট (৬০ + ৬০) বা ১২০ মাইল পথ চলতে সময় লাগবে মোট ৩ ঘণ্টা। অতএব গড়ে প্রতিঘণ্টায় গতিবেগ (১২০ ÷ ৩) মাইল বা ৪০ মাইল।

এখন যদি দুই জায়গার দূরত্ব হতো ১২০ মাইল, তবে যেতে সময় লাগত ৪ ঘণ্টা আর ফিরতে সময় লাগত ২ ঘণ্টা। অতএব যাওয়া ও ফিরে আসতে মোট (১২০ + ১২০) বা ২৪০ মাইল অতিক্রমে সময় লাগত (৪ + ২) বা ৬ ঘণ্টা। তবে এ ক্ষেত্রে গড় গতিবেগ ঘণ্টায় (২৪০ ÷ ৬) বা ৪০ মাইল। এভাবে আমরা দুই জায়গার মধ্যে দূরত্ব যাই ধরি, এসব সময় যাওয়া-আসায় গড় গতিবেগে এ ক্ষেত্রে হবে ঘণ্টায় ৪০ মাইল। অতএব প্রথমে আমরা বলেছিলাম ঘণ্টায় ৪৫ মাইল, তা সঠিক নয়।

সমস্যাটি সাধারণীকরণ করে বীজগণিতের সাহায্যেও আমরা দেখাতে পারি, এ ক্ষেত্রে প্রতিঘণ্টার গড় গতিবেগ ৪০ মাইল। ধরা যাক দুই জায়গার মধ্যে দূরত্ব সমান x মাইল। অতএব যাতায়াতে আমাদের চলতে হবে মোট $2x$ মাইল। আর ঘণ্টায় ৩০ মাইল বেগে যেতে সময় লাগবে $\frac{x}{30}$ ঘণ্টা, আর ফিরে আসতে সময় লাগবে $\frac{x}{60}$ ঘণ্টা। অতএব যাওয়া-আসায় মোট সময় লাগবে $(\frac{x}{30}+\frac{x}{60})$ ঘণ্টা, বা $\frac{2x+x}{60}$ ঘণ্টা বা $\frac{3x}{60}$ ঘণ্টা বা $\frac{x}{20}$ ঘণ্টা।

তাহলে এ ক্ষেত্রে $\frac{x}{20}$ ঘণ্টায় আমরা অতিক্রম করছি $2x$ মাইল জায়গা, অতএব এক ঘণ্টায় আমরা অতিক্রম করছি $(2x \div \frac{x}{20})$ মাইল বা $(2x \times \frac{20}{x})$ মাইল বা ৪০ মাইল। এ ক্ষেত্রে আমরা শেষ পর্যন্ত গড় গতিবেগটা পেলাম ঘণ্টায় ৪০ মাইল।

স্পষ্টতই এ ক্ষেত্রে সাধারণ গড় (৩০ + ৬০) ÷ ২ = ৪৫ মাইল সঠিক না হয়ে সঠিক গড় হচ্ছে (৩০ + ৩০ + ৬০) ÷ ৩ = ৪০ মাইলই সঠিক। নিচের সঠিক গড়টিকে বীজগণিতে বলা হয়ে Harmonic Mean, যা বাংলায় বলা যায় সদৃশ গড়, কিংবা সমন্বিত গড়।

এভাবে বাস্তব জীবনে এমন উদাহরণ আছে যেখানে গড় নির্ণয়ে সাধারণ গড় নির্ণয় প্রক্রিয়া অবলম্বন করলে ভুল হবে। এ ক্ষেত্রে আমাদের সঠিক উত্তর পেতে ভাবতে হবে হারমনিক মিন বা সদৃশ গড় নির্ণয় প্রক্রিয়া অবলম্বনে। এমনি আরেকটি উদাহরণ দিই। একজন ছাত্র ১০টি বিষয়ের ৯টিতে নম্বর পেল ১০০ শতাংশ এবং একটিতে পেল ৫০ শতাংশ। সেসব বিষয়ে গড়ে কত শতাংশ নম্বর পেল? আমরা যদি বলি সে (১০০% + ৫০%) ÷ ২ বা ৭৫% হাতে নম্বর পেল তবে ভুল বলা হবে। এ ক্ষেত্রে ছাত্রটি ১০ বিষয়ে মোট নম্বর পেল (৯×১০০ + ১×৫০) বা ৯৫০। অতএব গড়ে প্রতিবিষয়ে পেল (৯৫০ ÷ ১০) বা ৯৫। অর্থাৎ সে ১০০ নম্বরের মধ্যে গড়ে প্রতি বিষয়ে পেল ৯৫ নম্বর। অতএব তার নম্বর পাওয়ার গড় ৯৫ শতাংশ। এ ক্ষেত্রেও আমরা সঠিক উত্তর পেয়েছি হারমানিক গড় বা সদৃশ গড় বের করে।

এ ধরনের হারমনিক মিন বা সদৃশ গড় নির্ণয়ের জন্য গণিতবিদেরা আমাদের জন্য একটি সহজবোধ্য মজার সূত্র দিয়েছেন। আমরা যখন দুটি হার a এবং b-এর সদৃশ গড় বের করতে চাই, তখন এই দুটি হারের সদৃশ গড় হবে $\frac{2ab}{a+b}$। আবার তিনটি হার a, b এবং c হলে এগুলোর সদৃশ গড় হবে $\frac{3abc}{ab+bc+ca}$। আর চারটি হার a, b, c এবং d-এর সদৃশ গড় হবে $\frac{4abcd}{abc+bcd+cda+dab}$।

আমরা যদি এখানে উল্লিখিত ৩০ মাইল ঘণ্টায় ও ৪০ মাইল ঘণ্টায় গতির হার নিয়ে এ দুয়ের গড় গতির হার বের করতে চাই, তবে $\frac{2ab}{a+b}$ সূত্রে $a = 30$ এবং $b = 60$ ধরে নির্ণেয় গড় পাই $\frac{2\times30\times60}{30+60} = \frac{3600}{90} = 40$ পাই।

এ সূত্র ব্যবহারের আরেকটি উদাহরণ দেবো হারমানিক মিন a সদৃশ গড়ের বিষয়টি আরো স্পষ্ট করে তোলার জন্য। ধরা যাক একটি বিমানের প্রতিঘণ্টায় সাধারণ গড় গতিবেগ ৩০০ মাইল। বিমানটি নিউইয়র্ক ও ওয়াশিংটনের মধ্যে যাতায়াত করে। নিউইয়র্ক থেকে ওয়াশিংটনের দিকে বায়ু বইছে ঘণ্টায় ৫০ মাইল বেগে। বিমানটি নিউইয়র্ক থেকে বাতাসের অনুকূলে যাবে ওয়াশিংটন, আবার সেখান থেকে বিমানটি নিউইয়র্ক ফিরে আসবে বায়ুর প্রতিকূলে। অতএব যাওয়ার সময় যাবে ঘণ্টায় (৩০০ + ৫০) বা ৩৫০ মাইল বেগে। ফিরবে (৩০০-৫০) বা ২৫০ মাইল বেগে। অতএব এখানে $\frac{2ab}{a+b}$ সূত্রটি ব্যবহার করে গড় গতিবেগ পাই $\frac{২\times৩৫০\times২৫০}{৩৫০+২৫০}$ = ২৯১.৬৬৭ মাইল।

তাহলে দেখা গেল এই গড় গতিবেগ বিমানের স্বাভাবিক গতিবেগ ঘণ্টায় ৩০০ মাইলের চেয়ে কম। অতএব বায়ু না থাকলে বিমানটির যাওয়াতে যে সময় লাগত, এ ক্ষেত্রে তার চেয়ে বেশি সময় লাগবে।

পাই (π)-এর মান মনে রাখা

পাই (π) একটি মজার সংখ্যা। যেকোনো বৃত্তের পরিসীমাকে এর ব্যাসার্ধ্য দিয়ে ভাগ করলে সব সময় ধ্রুবসংখ্যা ২২÷৭ পাই। এই ২২÷৭ কে নাম দেয়া হয়েছে পাই (π)। ২২÷৭ কে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করলে এর দশমিকের পরের অঙ্ক কখনোই শেষ হয় না। যেমন এর মান

৩.১৪১৫৯ ২৬৫৩৮৯৭৯৩ ২৩৮৪৬২৬৪৩৩ ৮৩২৭৯৫০২৮৮ ৪১৯৭১৬৯৩৯৯... অনেকে চেষ্টা করে দেখেছেন এর দশমিকের পরের ঘরগুলোর কোনো শেষ নেই। সাধারণত বিজ্ঞানের ছাত্ররা গাণিতিক নানা সমস্যার সমাধান এই π-এর মান ব্যবহার করে থাকে। সেক্ষেত্রে এর মান দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত ব্যবহার করা হয়। অর্থাৎ π = ৩.১৪ ধরে গাণিতিক সমস্যাগুলো সমাধান করা হয়। কিন্তু এরপরেও নোমোনিকস নামে স্মরণ রাখার কৌশল ব্যবহার করে এর মান দশমিকের পরের কয়েক ঘর পর্যন্ত মনে রাখতে সক্ষম হয়েছেন।

এজন্য আমরা π-এর মান পেতে পারি। যেমন : ‘Wow ! I made a great discovery’ (3.14159...), ‘Can I have a small container of coffee’ (3.1415926...) How I want a drink alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantion mechanics’ (3.14159 26525 8979...).

— গণিতদাদু