গণিতের অলিগলি

পর্ব : ৮৯

৪০ থেকে ৬০ পর্যন্ত সংখ্যার বর্গ

এখানে ৪০ থেকে ৬০ পর্যন্ত সংখ্যার বর্গ দ্রুত নির্ণয়ের একটি মজার নিয়ম জানব। ৪০, ৫০, ৬০-এর বর্গ নির্ণয় আমরা সহজেই জেনে নিতে পারি। যেমন : $৪০^২$ = ১৬০০, $৫০^২$ = ২৫০০ এবং $৬০^২$ = ৩৬০০। তাই আমরা এখানে শুধু জানব কী করে দ্রুত ৪১ থেকে ৪৯ এবং ৫১ থেকে ৫৯ পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর বর্গ নির্ণয় করতে পারব।

প্রথমেই ধরা যাক ৫১ থেকে ৫৯ পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর বর্গ নির্ণয় করতে চাই। এ ক্ষেত্রে বর্গফলে থাকবে চারটি অঙ্ক। এখানে আমাদের জানতে হবে দুটি বিষয়– বর্গফলের প্রথম দুটি অঙ্ক কিভাবে জানা যায় এবং এরপর জানতে হবে শেষ দুটি অঙ্ক কিভাবে জানা যায়। ৫১ থেকে ৫৯ পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর বর্গ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে এসব সংখ্যাকে আমাদের ভাবতে হবে (৫০ + ক) আকারে। যেমন ৫১-এর বেলায় ক = ১, ৫২-এর বেলায় ক = ২, ৫৯-এর বেলায় ক = ৯ হবে। তাহলে বর্গফলের প্রথম দুটি অঙ্ক হবে ২৫ + ক এবং শেষ দুটি অঙ্ক হবে $ক^২$। অতএব ৫২-এর বর্গ নির্ণয়ের সময় ক = ২। তাহলে নির্ণেয় বর্গফল :

প্রথম দুটি অঙ্ক = ২৫ + ক = ২৫ + ২ = ২৭

শেষ দুটি অঙ্ক = $ক^২ = ২^২$ = ০৪

অতএব $৫২^২$ = ২৭০৪।

একইভাবে ৫৮-এর বর্গ নির্ণয়ের সময় ক = ৮। তাহলে নির্ণেয় বর্গফল :

প্রথম দুটি অঙ্ক = ২৫ + ক = ২৫ + ৮ = ৩৩

শেষ দুটি অঙ্ক = $ক^২ = ৮^২$ = ৬৪

অতএব $৫৮^২$ = ৩৩৬৪।

এই নিয়ম অনুসরণ করে আমরা ৫০-এর বর্গও বের করতে পারি। এক্ষেত্রে ক = ০। তাহলে নির্ণেয় বর্গফল :

প্রথম দুটি অঙ্ক = ২৫ + ক = ২৫ + ০ = ২৫

শেষ দুটি অঙ্ক = $ক^২ = ০^২$ = ০০

$৫০^২$ = ২৫০০।

চেষ্টা করে দেখুন এ নিয়মে ৫০ থেকে ৫৯ সংখ্যাগুলোর বর্গফল বের করতে পারেন কি না।

এবার জানব ৪১ থেকে ৪৯ পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর বর্গফল বের করার নিয়মটি। এ ক্ষেত্রে প্রদত্ত সংখ্যাটিকে ৪০+ক হিসেবে বিবেচনা করব। তাহলে ৪১-এর ক্ষেত্রে ক = ১, ৪৫-এর ক্ষেত্রে ক = ৫ এবং ৪৯-এর ক্ষেত্রে ক = ৯। এ ক্ষেত্রে নির্ণেয় বর্গফল হবে চার অঙ্কের।

এই ৪ অঙ্কের মধ্যে :

প্রথম দুটি অঙ্ক = ১৫ + ক

শেষ দুটি অঙ্ক = $(১০-ক)^২$

অতএব ৪২-এর বর্গ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ক = ২

অতএব নির্ণেয় বর্গফল :

প্রথম দুটি অঙ্ক = ১৫ + ক = ১৫ + ২ = ১৭

শেষ দুটি অঙ্ক = $(১০ - ক)^২ = (১০ - ২)^২ = ৮^২$ = ৬৪

অতএব $৪২^২$ = ১৭৬৪

একই নিয়মে জানতে পারব ৪৮-এর বর্গফল। এ ক্ষেত্রে ক = ৮

তাহলে নির্ণেয় বর্গফল :

প্রথম দুটি অঙ্ক = ১৫ + ক = ১৫ + ৮ = ২৩

শেষ দুটি অঙ্ক = $(১০ - ক)^২ = (১০ - ৮)^২ = ২^২$ = ০৪

অতএব $৪৮^২$ = ২৩০৪

এবার দেখব, এই দুটি নিয়মের পেছনে গণিতের রহস্যটা কোথায়। কিংবা বলতে পারি এ ক্ষেত্রে গণিত কিভাবে কাজ করে।

প্রথম দেখব ৫০ থেকে ৫৯ পর্যন্ত সংখ্যার বর্গফল বের করার বিষয়টি। এ ক্ষেত্রে আসলে আমরা বের করছি $(৫০ + ক)^২$ = কত?

আমরা জানি, $(৫০ + ক)^২ = (৫০)^২ + ২ \times ৫০ \times ক + ক^২$

$= ২৫০০ + ১০০ক + ক^২$

বর্গফলে ২৫০০ + ১০০ক হচ্ছে প্রথম দুটি অঙ্ক, আর $ক^২$ হচ্ছে শেষ দুটি অঙ্ক।

এবার দেখা যাক ৪১ থেকে ৪৯ পর্যন্ত সংখ্যার বর্গফল নির্ণয়ের সময় কী ঘটে? আসলে এ ক্ষেত্রে আমরা বের করি $(৪০ + ক)^২$-এর মান। আমরা জানি,

$(৪০ + ক)^২ = (৫০ - ১০ + ক)^২$

$= \{৫০ - (১০ - ক)\}^২$

$= ২৫০০ - ২ \times ৫০ \times (১০ - ক) + (১০ - ক)^২$

$= ২৫০০ - ১০০ (১০ - ক) + (১০ - ক)^২$

$= ২৫০০ - ১০০০ + ১০০ ক + (১০ - ক)^২$

$= ১৫০০ + ১০০ ক + (১০ - ক)^২$

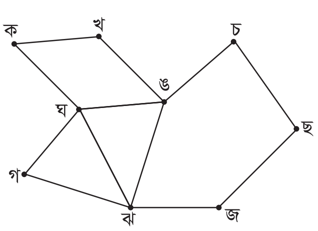
গুণফলের এই ১৫০০ + ১০০ ক হচ্ছে প্রথম দুটি অঙ্ক এবং $(১০ - ক)^২$ হচ্ছে শেষ দুটি অঙ্ক।

ইউলার বৈশিষ্ট্য

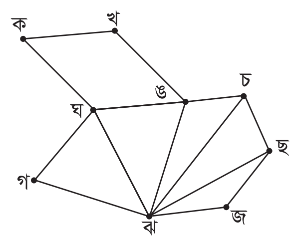
আমরা এখানে গণিত জগতের একটি মজার বৈশিষ্ট্যের কথা জানব, যা ইউলার বৈশিষ্ট্য (Euler Characteristic) নামে সুপরিচিত। বিষয়টি বোঝার জন্য এক টুকরা কাগজ ও একটি পেন্সিল নিন। এই কাগজে পেন্সিল দিয়ে যে কয়টি ইচ্ছে বিন্দু দিন। ধরা যাক, নিচের ১ নম্বর চিত্রটির মতো আপনি ক, খ, গ, ঘ, ঙ, চ, ছ, জ, ঝ এই ৯টি বিন্দু নিলেন। এখন ইচ্ছেমতো যেকোনো দুইটি বিন্দু যোগ করে যত ইচ্ছে রেখা আঁকুন। তবে শর্ত থাকল কোনোমতেই কোনো রেখা অপর রেখাকে ছেদ করতে পারবে না। ধরা যাক, আপনি নিচের ১ নম্বর চিত্রের মতো করে রেখাগুলো টানলেন।

লক্ষণীয়, এ চিত্রে বিন্দু বা ফোঁটার সংখ্যা ৯টি। রেখার সংখ্যা ১২টি এবং রেখাগুলো টানার ফলে তা মোট ৫টি ক্ষেত্রে বা এলাকায় সীমাবদ্ধ (এ ক্ষেত্রে রেখাগুলো দিয়ে গঠিত সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের বাইরের ১টি ক্ষেত্রকেও বিবেচনায় রাখতে হবে)। এখন সতর্কতার সাথে গুনে দেখুন আমরা যতগুলো বিন্দু বা ফোঁটা নিই, যতগুলো রেখাই টানি এবং এর ফলে ক্ষেত্রটি যতগুলো ক্ষেত্র বা এলাকায় বিভক্ত হোক না কেনো, সব সময় একটি মজার সম্পর্ক পাব। সম্পর্কটি হচ্ছে ফোঁটার সংখ্যা থেকে রেখার সংখ্যা বিয়োগ করে এই বিয়োগফলের সাথে এলাকার সংখ্যা যোগ করলে তা সব সময় ২ পাব। নিচের ১ নম্বর চিত্রে ফোঁটার সংখ্যা = ৯, রেখার সংখ্যা = ১২ এবং বিভক্ত এলাকার বা ক্ষেত্রের সংখ্যা = ৫।

অতএব (ফোঁটা সংখ্যা) - (রেখা সংখ্যা) + (ক্ষেত্র সংখ্যা) = ৯ - ১২ + ৫ = ২



চিত্র : ০১



চিত্র : ০২

এখন এই চিত্রটিতে আমরা যদি ঝ বিন্দুর সাথে চ বিন্দু এবং ঝ বিন্দুর সাথে ছ বিন্দু যোগ করি, তবে নিচের দুই নম্বর চিত্রটি পাব।

লক্ষণীয়, এ চিত্রে বিন্দু বা ফোঁটার সংখ্যা আগের মতোই ৯টি, রেখার সংখ্যা ১৪টি এবং ক্ষেত্রের সংখ্যা ৭টি (আগের মতো রেখাগুলো দিয়ে গঠিত সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রগুলোর বাইরে ১টি ক্ষেত্রও এর সাথে যোগ হবে)। অতএব দ্বিতীয় চিত্রের ক্ষেত্রে :

(ফোঁটা সংখ্যা) - (রেখা সংখ্যা) + (ক্ষেত্র সংখ্যা) = ৯ - ১৪ + ৭ = ২

এভাবে আমরা যেকোনো একটি কাগজে যত ইচ্ছে ফোঁটা বা বিন্দু নিয়ে ফোঁটাগুলো যত সংখ্যার রেখা টেনে যত সংখ্যার ক্ষেত্রে ভাগ করি না কেনো, সব সময় ফোঁটার সংখ্যার সাথে ক্ষেত্রের সংখ্যা যোগ করে যোগফল থেকে রেখার সংখ্যা বাদ দিলে আমরা পাব ২। তবে মনে রাখতে হবে কখনই যেনো কোনো একটি রেখাও অপর কোনো রেখাকে ছেদ না করে।

গণিতদাদু