গণিতের অলিগলি

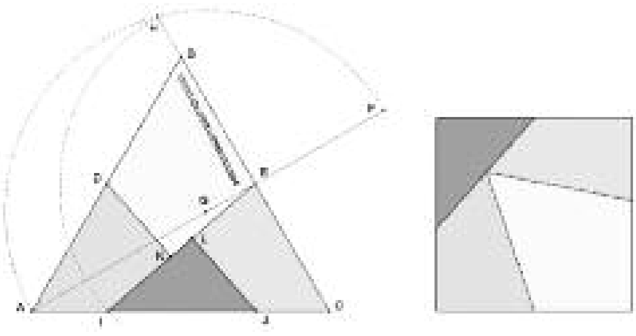
পর্ব : ৯৩

ডুডিনি নাম্বার

হেনরি আর্নেস্ট ডুডিনি। জন্ম ১৮৫৭ সালের ১০ এপ্রিল। মৃত্যু ১৯৩০ সালের ২৩ এপ্রিল। ইংরেজ গণিতবিদ ও লেখক। লজিক পাজল ও গাণিতিক খেলার ওপর তার বিশেষ পাণ্ডিত্য ছিল। তিনি তার দেশ ব্রিটেনে পরিচিত ছিলেন প্রথম সারির গণিতের ধাঁধার জনক হিসেবে। তার দাদা জন ডুডিনি ছিলেন স্বশিক্ষিত এক গণিতবিদ। পেশায় ছিলেন মেষপালক। হেনরি ডুডিনি ছোটবেলায়ই দাবা খেলতে শেখেন। সারাজীবন তিনি দাবা খেলা অব্যাহত রাখেন। দাবা খেলাই কার্যত তাকে গণিতের প্রতি ও গণিতের ধাঁধা তৈরিতে আগ্রহী করে তোলে। দাবা খেলার সমস্যা ও সমাধান ছোটবেলা থেকেই তার পছন্দের বিষয় ছিল।

ডুডিনি পেশায় ছিলেন একজন বেসামরিক চাকুরে। তবে তিনি নিজেকে ব্যস্ত রেখেছিলেন বিভিন্ন গণিতের ধাঁধা এবং মজার মজার সমস্যা তৈরি ও এর সমাধানের কাজে। প্রথম দিকে তিনি গণিতের ধাঁধা তৈরি করে বিভিন্ন পত্রিকা ও সাময়িকীতে প্রকাশ করতেন। দ্য উইকলি ডিসপ্যাচ, দ্য কুইন, ব্লাইট ও ক্যাসেল'স ম্যাগাজিনে তার এসব গণিতের ধাঁধা ছাপা হতো। দ্য স্ট্র্যান্ড ম্যাগাজিনে সুদীর্ঘ ২০ বছর সফলভাবে গণিত নিয়ে 'পারপ্রেক্রিটিজ' নামে একটি কলাম লেখেন। এ পত্রিকাটি সম্পাদনা করতেন 'টিড-বিটসেচ'-এর সাবেক সম্পাদক জর্জ নিউনিস। তিনি গণিতের মজার মজার বিষয় নিয়ে বেশ কয়েকটি বই লিখে গেছেন : দ্য ক্যান্টারবারি পাজেল (১৯০৭), অ্যামিউজমেন্টস ইন ম্যাথামেথিকস (১৯১৭), দ্য ওয়ার্ল্ড'স বেস্ট ওয়ার্ড পাজেল (১৯২৫), মডার্ন পাজেল (১৯২৬), পাজেলস অ্যান্ড কিউরিয়াস প্রবলেমস (১৯৩১, মরণোত্তর) এবং অ্যা পাজেল-মাইন্ড (তারিখবিহীন, মরণোত্তর)।

হেনরি ডুডিনি অনেক মজার মজার গাণিতিক সমস্যার সমাধান দিয়ে গেছেন। এমনি একটি মজার গাণিতিক ধাঁধা হচ্ছে তার উদ্ভাবিত হেবারডেশার'স পাজেল। এতে তিনি একটি সমবাহু ত্রিভূজকে এমনভাবে কেটে চার টুকরো করেন, যেগুলো জোড়া লাগালে একটি বর্গক্ষেত্র তৈরি হয়।



তিনি আমাদের একটি মজার সংখ্যার কথাও জানিয়ে গেছেন, যা ডুডিনি নাম্বার বলে পরিচিত। আজ আমরা মূলত ডুডিনি নাম্বার সম্পর্কে এ লেখায় জানার চেষ্টা করব।

আমরা জানি একটি সংখ্যার বর্গ বা স্কয়ার হচ্ছে সেই সংখ্যাকে সেই সংখ্যা দিয়ে গুণ করলে যে গুণফল বের হয় তা। যেমন ২-এর বর্গ $২^{২} = ২ \times ২ = ৪$। ৮-এর বর্গ $= ৮^{২} = ৮ \times ৮ = ৬৪$। তেমনি একটি সংখ্যার ঘন বা কিউব হচ্ছে ওই সংখ্যাকে পাশাপাশি তিনবার বসিয়ে এদের গুণফল বের করলে যে গুণফল বের হয় তা। যেমন ২-এর ঘন বা কিউব $= ২^{৩} = ২ \times ২ \times ২ = ৮$ এবং ৮-এর ঘন $= ৮^{৩} = ৮ \times ৮ \times ৮ = ৫১২$ এবং ১-এর বর্গ $= ১ \times ১ = ১$ ও ১-এর ঘন $= ১ \times ১ \times ১ = ১$। কোনো সংখ্যার বর্গ বা ঘন নির্ণয় সম্পর্কে আমরা স্কুলের গণিতে জেনেছি।

ওপরের উদাহরণ থেকে আমরা সহজেই বলতে পারি ৮-এর বর্গ ৬৪, এবং ৬৪-এর বর্গমূল ৮। তেমনি বলতে পারি ৮-এর ঘন ৫১২ এবং ৫১২-এর ঘনমূল ৮। ডুডিনি বিশেষ কিছু সংখ্যার ঘন ও ঘনমূলের মধ্যে একটি মজার সম্পর্ক খুঁজে বের করে আমাদের জানিয়েছেন। লক্ষ করি :

$১^{৩} = ১ \times ১ \times ১ = ১$

$৪^{৩} = ৪ \times ৪ \times ৪ = ৬৪$

$৫^{৩} = ৫ \times ৫ \times ৫ = ১২৫$

$৭^{৩} = ৭ \times ৭ \times ৭ = ৩৪৩$

$৮^{৩} = ৮ \times ৮ \times ৮ = ৫১২$

$১৭^{৩} = ১৭ \times ১৭ \times ১৭ = ৪৯১৩$

$২৬^{৩} = ২৬ \times ২৬ \times ২৬ = ১৭৫৭৬$

$২৭^{৩} = ২৭ \times ২৭ \times ২৭ = ১৯৬৮৩$

এভাবে যেকোনো সংখ্যার ঘনফল এবং সেই ঘনফলের ঘনমূল জানতে পারি। ওপরের তালিকা মতে, ৫-এর ঘনফল ১২৫ এবং ১২৫-এর ঘনমূল ৫। ঠিক একইভাবে ১৭-এর ঘনফল ৪৯১৩ এবং ৪৯১৩-এর ঘনমূল ১৭।

ডুডিনি জানালেন কিছু কিছু সংখ্যার ঘনফলে যে কয়টি অঙ্ক বা ডিজিট আছে সেগুলো যোগ করলে ওই সংখ্যাটিই পাওয়া যায়। যেমন ২৭-এর ঘনফল ১৯৬৮৩। আর ওই ১৯৬৮৩-এর অঙ্ক বা ডিজিটগুলোর যোগফল $= ১+৯+৬+৮+৩ = ২৭$। একইভাবে ৮-এর ঘনফল ৫১২। আর ৫১২-এর অঙ্কগুলোর যোগফল $= ৫+১+২ = ৮$। তেমনিভাবে ২৬-এর ঘনফল ১৭৫৭৬। এবং এই ঘনফলের অঙ্কগুলোর যোগফল $= ১+৭+৫+৭+৬ = ২৬$।

ডুডিনি দেখালেন সব সংখ্যার ঘনফলের ক্ষেত্রেই এ মজার সম্পর্ক মেনে চলতে দেখা যায় না। যেমন উপরোল্লিখিত তালিকা থেকে আমরা পাই ৫-এর ঘনফল ১২৫। কিন্তু ১২৫-এর অঙ্কগুলোর যোগফল ৫ নয়। এ ক্ষেত্রে এর অঙ্কগুলোর যোগফল $= ১+২+৫ = ৮$। একইভাবে ৭-এর ঘনফল ৩৪৩। কিন্তু ৩৪৩ সংখ্যাটির অঙ্কগুলোর যোগফল ৭ নয়। এদের যোগফল $= ৩+৪+৩ = ১০$। তাহলে আমরা স্পষ্ট উদাহরণ পেলাম, এমন কিছু সংখ্যা আছে যেগুলোর ঘনফলের অঙ্ক বা ডিজিটগুলোর যোগ করলে ওই সংখ্যাটিই পাওয়া যায় না। সব সংখ্যার ঘনফল এ নিয়ম মেনে চলে না। গণিতবিদ আমাদের গণিতের সেই মজার তথ্যটিই জানালেন। যেসব সংখ্যার ঘনফল ওই মজার সম্পর্কটি মেনে চলে, সেগুলোরই নাম ডুডিনি নাম্বার। তাহলে আমরা ডুডিনি নাম্বারের সংজ্ঞা দিতে পারি এভাবে : যেসব সংখ্যার একটি পূর্ণ ঘনমূল (Perfect cube root) রয়েছে এবং ওই সংখ্যার অঙ্ক বা ডিজিটগুলোর যোগফল যদি এই সংখ্যার ঘনমূলের সমান হয়, তবে এই সংখ্যাটিকে আমরা বলব ডুডিনি নাম্বার। এই সংজ্ঞা মতে, ৫১২ একটি ডুডিনি নাম্বার। কারণ, এর ঘনমূল $= ৫+১+২ = ৮$। অর্থাৎ $৮^{৩} = ৫১২$। একইভাবে ১৯৬৮৩ একটি ডুডিনি নাম্বার। কারণ, এর ঘনমূল $= ১+৯+৬+৮+৩ = ২৭$। অর্থাৎ $২৭^{৩} = ১৯৬৮৩$। তেমনিভাবে আমরা ৫৮৩২-কেও বলব একটি ডুডিনি নাম্বার। কারণ, এর ঘনমূল $= ৫+৮+৩+২ = ১৮$। $১৮^{৩} = ৫৮৩২$।

ডুডিনি আমাদের দেখিয়ে গেলেন শুধু ৬টি সংখ্যা বা নাম্বারই হচ্ছে ডুডিনি নাম্বার। আর কোনো নাম্বারই ডুডিনি নাম্বার নয়। এই ৬টি সুনির্দিষ্ট ডুডিনি নাম্বার হলো : ১, ৫১২, ৪৯১৩, ৫৮৩২, ১৭৫৭৬ এবং ১৯৬৮৩। কারণ,

$$১ = ১^{৩};\ ১ = ১$$

$$৫১২ = ৮^{৩};\ ৮ = ৫+১+২$$

$$৪৯১৩ = ১৭^{৩};\ ১৭ = ৪+৯+১+৩$$

$$৫৮৩২ = ১৮^{৩};\ ১৮ = ৫+৮+৩+২$$

$$১৭৫৭৬ = ২৬^{৩};\ ২৬ = ১+৭+৫+৭+৬$$

$$১৯৬৮৩ = ২৭^{৩};\ ২৭ = ১+৯+৬+৮+৩$$

গণিতদাদু

জেনারেলাইজড ডুডিনি নাম্বার

ওপরের আলোচনা থেকে স্পষ্ট, ডুডিনি প্রাথমিকভাবে কোনো সংখ্যার কিউব বা ঘনফলের ক্ষেত্রেই এ মজার সম্পর্ক খুঁজে বের করেন। আর সে ক্ষেত্রে তিনি মাত্র সুনির্দিষ্ট ৬টি ডুডিনি নাম্বার খুঁজে বের করেন। পরে চিন্তা করেন একটি সংখ্যার ঘাত ৩ বা ঘন না ধরে যদি ৪ ধরা হয়, তখন এ সম্পর্কটা কেমন দাঁড়ায়। দেখা গেল সেখানেও কোনো কোনো সংখ্যার ক্ষেত্রে এ মজার সম্পর্ক বজায় থাকে। যেমন :

$$১ = ১^{৪};\ ১ = ১$$
$$২৪০১ = ৭^{৪};\ ৭ = ২+৪+০+১$$
$$২৩৪২৫৬ = ২২^{৪};\ ২২ = ২+৩+৪+২+৫+৬$$
$$৩৯০৬২৫ = ২৫^{৪};\ ২৫ = ৩+৯+০+৬+২+৫$$
$$৬১৪৬৫৬ = ২৮^{৪};\ ২৮ = ৬+১+৪+৬+৫+৬$$
$$১৬৭৯৬১৬ = ৩৬^{৪};\ ৩৬ = ১+৬+৭+৯+৬+১+৬$$

তাহলে আমরা দেখলাম কোনো কোনো সংখ্যা পাওয়ার বা ঘাত ৪-এর ক্ষেত্রেও এ মজার সম্পর্ক মেনে চলে। শুধু তাই নয়, এমন সংখ্যা আছে যেগুলো পাওয়ার বা ঘাত ৩ বা ৪-এর চেয়ে অনেক বেশি হলেও সেসব সংখ্যাও এ মজার সম্পর্ক মেনে চলে। যেমন :

$১^{২০} = ১$; আর ১ = ১

$৯০^{২০}$ = ১২১৫৭৬৬৫৪৫৯০৫৬৯২৮৮০১ ০০০০০ ০০০০০ ০০০০০ ০০০০০; এবং এ সংখ্যাটির সব অঙ্ক বা ডিজিটের যোগফল = ৯০। আবার,

$১৮১^{২০}$ = ১৪২৪২০১৬৯১ ৯৭৭০ ৫৫০৪১৩৬০৭০৯৪২৩৫৪৬২৩১৮৭৯৬০৯০৩৯৬০১; এবং এ সংখ্যার সব অঙ্কের যোগফল ১৮১।

$২০৭^{২০}$ = ২০৮৬৪৪৪৮৪৭২৯৭৫৬২৮ ৯৪৭২২৬০০৫৯৮১২৬৭১৯৪৪৪৭০৪২৫৮৪০০১; এবং এ সংখ্যার সব অঙ্কের বা ডিজিটের যোগফল ২০৭।

আরও বড় সংখ্যার বেলায়

এখানেই শেষ নয়। আরও বড় বড় সংখ্যা আছে, যা খাতায় সাধারণভাবে লেখা সম্ভব নয়, সেগুলোর বেলায়ও এ মজার সম্পর্ক মেনে চলতে দেখা গেছে। তবে তা খাতায় লিখে নয়, কমপিউটার প্রোগ্রামিংয়ের মাধ্যমে খুঁজে বের করা হয়েছে। যেমন $(৩৫৯০০০০০)^{৩১২২৩৫৩}$ সংখ্যাটি এ সম্পর্ক মেনে চলে। এ সংখ্যাটি আসলে হচ্ছে ৩৫৯০০০০০ সংখ্যাটিকে ৩১২২৩৫৩ বার পাশাপাশি বসিয়ে ধারাবাহিকভাবে সবগুলোর গুণফল যা দাঁড়ায় তা। সে গুণফল খাতায় লেখা সম্ভব নয়। তবে কমপিউটার প্রোগ্রামিংয়ের মাধ্যমে জানা এ গুণফল সংখ্যাটির অঙ্ক সংখ্যা বা ডিজিট সংখ্যা ২৩৫৮৯৬৭২টি। আর এ অঙ্কগুলো একসাথে যোগ করলে যোগফল দাঁড়ায় ৩৫৯০০০০০। এটি হচ্ছে এ ধরনের সম্পর্ক মেনে চলা সবচেয়ে বড় সংখ্যা। প্রথমে ঘনফলের ক্ষেত্রে পাওয়া সুনির্দিষ্ট ৬টি সংখ্যা অর্থাৎ ১, ৫১২, ৪৯১৩, ৫৮৩২, ১৭৫৭৬ ও ১৯৬৮৩- কে বলা হয় ডুডিনি নাম্বার। আর এরপর দেখানো ৩-এর চেয়ে বেশি ঘাতের বেলায় যেসব সংখ্যা এ সম্পর্ক মেনে চলে সেগুলোকে বলা হয় 'জেনারেলাইজড ডুডিনি নাম্বার'। একটু আগেই জানলাম, এ জেনারেলাইজড ডুডিনি নাম্বারের মধ্যে $৩৫৯০০০০০^{৩১২২৩৫৩}$ সংখ্যাটি হচ্ছে সবচেয়ে বড় জেনারেলাইজড ডুডিনি নাম্বার। আগেই উল্লেখ করা হয়েছে, এ সংখ্যাটি লিখতে প্রয়োজন ২৩৫৮৯৬৭২টি অঙ্ক বা ডিজিট, যেগুলোর যোগফল = ৩৫৯০০০০০। এ সংখ্যাটির খবর আমাদের জানিয়েছেন রেসতা নামে এক ভদ্রলোক।

বিভিন্ন গণিতপ্রেমী মানুষ এ ধরনের আরও বেশ কয়েকটি বড় আকারের জেনারেলাইজড ডুডিনি নাম্বার আমাদের জানিয়েছেন। এগুলো আমরা জানতে পেরেছি ২০১০ থেকে ২০১২ সালের মধ্যে। এমন ৭টি জেনারেলাইজড ডুডিনি নাম্বারের কথা নিচে উল্লেখ করছি, যেগুলো উদ্ভাবন করেছেন জনৈক স্টিফেন জ্যাকব।

এক : $১০০১৯৮৩^{৩৭০৯৯}$; এ সংখ্যা লিখতে প্রয়োজন ২২২৬২৬টি অঙ্ক; আর এ অঙ্কগুলোর যোগফল ১০০১৯৮৩।

দুই : $৬৫৩২৩০^{৩০১৯২}$; এ সংখ্যা লিখতে প্রয়োজন ১৭৫৫৬৯টি অঙ্ক; আর এ অঙ্কগুলোর যোগফল ৬৫৩২৩০।

তিন : $৫৪৭২১০^{২৫৬৬২}$; এ সংখ্যা লিখতে প্রয়োজন ১৪৭২৫৩টি অঙ্ক; আর এ অঙ্কগুলোর যোগফল ৫৪৭২১০।

চার : $৪৫৮১১০^{২১৮৫৩}$; এ সংখ্যা লিখতে প্রয়োজন ১২৩৭১০টি অঙ্ক; আর এ অঙ্কগুলোর যোগফল ৪৫৮১১০।

পাঁচ : $৩৫০১১০^{১৭১৩৬}$; এ সংখ্যা লিখতে প্রয়োজন ৯৫০০৬টি অঙ্ক; আর এ অঙ্কগুলোর যোগফল ৩৫০১১০।

ছয় : $২০০১১০^{১০৩৪২}$; এ সংখ্যা লিখতে প্রয়োজন ৫৪৮২৬টি অঙ্ক; আর এ অঙ্কগুলোর যোগফল ২০০১১০।

সাত : $৫২২২০^{৩১০৩}$; এ সংখ্যা লিখতে প্রয়োজন ১৪৬৪০টি অঙ্ক; আর এ অঙ্কগুলোর যোগফল ৫২২২০।

আশা করি ডুডিনি নাম্বার ও জেনারেলাইজড ডুডিনি নাম্বার সম্পর্কে আমাদের জানাটা স্পষ্ট হয়েছে।

গণিতদাদু