গণিতের অলিগলি

পর্ব : ১২১

লেল্যান্ড নাম্বার

নাম্বার থিওরিতে লেল্যান্ড নাম্বার (Leyland Number) নামে একটি সংখ্যার কথা জানা যায়। লেল্যান্ড নাম্বার এমন একটি নাম্বার, যার আকারটি নিম্নরূপ : $ক^{খ} + খ^{ক}$। শর্ত হচ্ছে, এখানে ক ও খ ১-এর চেয়ে বড় পূর্ণ সংখ্যা হতে হবে, তবে ক ও খ একই কিংবা ভিন্ন সংখ্যা হতে পারবে। এ ক্ষেত্রে দেখা যাচ্ছে, ক কিংবা খ কখনই ২-এর চেয়ে ছোট হতে পারবে না, তবে ২-এর চেয়ে বড় হতে পারবে। প্রথমে আমরা ক = ২ এবং খ = ২ ধরতে পারি। কারণ, ক ও খ-এর মান একই হতে বাধা নেই। এ ক্ষেত্রে আমরা পাব সবচেয়ে ছোট লেল্যান্ড নাম্বারটি। আর এই নাম্বারটি হচ্ছে $ক^{খ} + খ^{ক} = ২^{২} + ২^{২} = ৪ + ৪ = ৮$।

অতএব আমরা বলতে পারি, ৮ হচ্ছে প্রথম বা সবচেয়ে ছোট লেল্যান্ড নাম্বার। এবার ক = ২ এবং খ = ৩ ধরে আমরা পাব দ্বিতীয় লেল্যান্ড নাম্বার $ক^{খ} + খ^{ক} = ২^{৩} + ৩^{২} = ৮ + ৯ = ১৭$। আবার ক = ৩ এবং খ = ৩ ধরে আমরা আরেকটি লেল্যান্ড নাম্বারটি পাই $৩^{৩} + ৩^{৩} = ২৭ + ২৭ = ৫৪$। আবার একইভাবে ক = ২ এবং খ = ৪ ধরলে আরেকটি লেল্যান্ড নাম্বার হবে $২^{৪} + ৪^{২} = ১৬ + ১৬ = ৩২$। এভাবে ক ও খ-এর বিভিন্ন মান ধরে আমরা পাব অসংখ্য লেল্যান্ড নাম্বার। এগুলো ছোট থেকে বড় সাজিয়ে লিখলে লেল্যান্ড নাম্বারগুলো হবে ৮, ১৭, ৩২, ৫৪, ৫৭, ১০০, ১৪৫, ১৭৭, ৩২০, ৩৬৮, ৫১২, ৫৯৩, ৯৪৫, ১১২৪, ...।

ক ও খ-এর জন্য এ ক্ষেত্রে অসংখ্য পূর্ণ সংখ্যা আমরা পাব, যেগুলোর মান ১-এর চেয়ে বড়। অতএব সহজেই অনুমেয়, আমরা পাব অসংখ্য লেল্যান্ড নাম্বার। এখানে একটি বিষয় গুরুত্বের সাথে মনে রাখতে হবে– ক ও খ-এর মান যেনো সব সময়ই ১-এর চেয়ে বড় হয়। তা না হলে প্রতিটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যাই লেল্যান্ড নাম্বার হয়ে যাবে। কারণ, ক বা খ-এর মান ১ ধরলে প্রতিটি লেল্যান্ড নাম্বার $ক^{খ}১ + ১^{ক}$ কিংবা $১^{খ} + খ^{ক}$ আকার ধারণ করবে।

এখানে লক্ষ করার বিষয়, ওপরে পাওয়া লেল্যান্ড নাম্বারগুলোর মধ্যে ১৭ ও ৫৯৩ অবশ্যই মৌলিক সংখ্যা বা প্রাইম নাম্বার। এগুলোকে ১ এবং ওই সংখ্যা ছাড়া অন্য কোনো সংখ্যা দিয়ে ভাগ করা যায় না। আমরা যদি লেল্যান্ড সংখ্যাগুলো থেকে প্রাইম নাম্বারগুলো বের করে নিই, তবে প্রথম দিকের লেল্যান্ড প্রাইম নাম্বারগুলো পাব : ১৭, ৫৯৩, ৩২৯৯৩, ২০৯৭৫৯৩, ৮৫৮৯৯৩৫৬৮১, ৫৯৬০৪৬৪৪৭৮৩৩৫৩২৪৯, ৫২৩৩৪৭৬৩৩০২৭৩৬০৫৩৭২১৩৬৮৭১৩৭, ৪৩১৪৩৯৮৮৩২৭৩৯৮৯৫৭২৭৯৩৪২৪১৯৭৫০৩৭৪৬০০১৯৩,...। এগুলোকে যদি আমরা ধারাবাহিকভাবে লেল্যান্ড নাম্বারের আকারে লিখি, তবে যথাক্রমে লিখতে পারি

$৩^{২}+২^{৩}$, $৯^{২}+২^{৯}$, $১৫^{২}+২১^{৫}$, $২১^{২}+২^{২১}$, $৩৩^{২}+২^{৩৩}$, $২৪^{৫}+৫^{২৪}$, $৫৬^{৩}+৩^{৫৬}$, $৩২^{১৫}+১৫^{৩২}$ ...।

আমরা যদি ক ২ + ২ ক সূত্রে ক-এর মান যথাক্রমে ৩, ৯, ১৫, ২১, ৩৩, ২০০৭, ২১২৭, ৩৭৫৯, ... ইত্যাদি বসাই, তবে ওপরে উল্লিখিত প্রাইম নাম্বারগুলো পাব।

এখন প্রশ্ন হচ্ছে, সবচেয়ে বড় লেল্যান্ড প্রাইম নাম্বার কোনটি? এক কথায় এর উত্তর দেয়া কঠিন। কারণ, যতই দিন যাচ্ছে ততই মানুষ বড় থেকে আরও বড় লেল্যান্ড প্রাইম নাম্বারটির কথা জানতে পারছে। যেমন– ২০১২ সালের নভেম্বর পর্যন্ত সময়ে আমরা সবচেয়ে বড় যে লেল্যান্ড প্রাইম নাম্বারটির কথা জানতে পারি, সেটি ছিল $৫১২২^{৬৭৫৩} + ৬৭৫৩^{৫১১২}$। এর মান এখানে লিখে প্রকাশ করা কঠিন। কারণ, এ সংখ্যাটি লিখে প্রকাশ করতে হলে আমাকে লিখতে হবে ২৫০৫০ অঙ্কের বা ডিজিটের একটি সংখ্যা। ২০১২ সালের ডিসেম্বরে এসে আমরা জানলাম এর চেয়েও বড় একটি লেল্যান্ড প্রাইম নাম্বারের কথা। সেটি হচ্ছে $৮৬৫৬^{২৯২৯} + ২৯২৯^{৮৬৫৬}$। আর এ সংখ্যাটি লিখতে প্রয়োজন ৩০০০৮টি ডিজিট বা অঙ্ক। আরও বড় ধরনের সম্ভাব্য যে লেল্যান্ড প্রাইম নাম্বারের কথা শোনা যায় তার মধ্যে আছে $৩১৪৭৩৮^{৯} + ৯^{৩১৪৭৩৮}$, যার রয়েছে ৩০০০৩৩৭টি অঙ্ক। এমনি আরেকটি সম্ভাব্য বড় ধরনের লেল্যান্ড প্রাইম নাম্বার হচ্ছে $৩২৮৫৭৪^{১৫} + ১৫^{৩২৮৫৭৪}$, যার ডিজিট সংখ্যা ৩৮৬৪৩৪টি।

ব্রাডি নাম্বার

আমরা আগের কোনো পর্বে ফ্যাবোনাচ্চি নাম্বার নিয়ে এ ধারাবাহিক লেখায় আলোচনা করেছি। যারা এই নাম্বার সম্পর্কে প্রথম শুনলেন, তাদের ভয় পাওয়ার কিছু নেই। কারণ, এখানে শুরুতেই ফ্যাবোনাচ্চি নাম্বারের পরিচিতি তুলে ধরব। এরপর ব্রাডি নাম্বারের আলোচনায় যাব।

প্রথমেই ১ সংখ্যাটি পাশাপাশি দুইবার বসিয়ে পাই : ১, ১। এই দুইটি একসাথে যোগ করলে পাই ২। প্রথম দুইটির পাশে এই ২ বসালে আমরা পাই ১, ১, ২। এই তিনটির শেষের দুইটির যোগফল ৩-কে আগের তিনটির পাশে বসালে হয় ১, ১, ২, ৩। এর পাশে শেষের দুইটির যোগফল ৫ বসালে সংখ্যা ধারাটি হয় ১, ১, ২, ৩, ৫। এবার এর পাশে শেষের দুইটির যোগফল ৮ বসালে পাই ১, ১, ২, ৩, ৫, ৮। এভাবে আমরা যদি শেষ দুইটি সংখ্যার যোগফল এর সাথে বারবার বসিয়ে যেতে থাকি, তবে আমরা পাব অসংখ্য সংখ্যার একটি সংখ্যা ধারা বা নাম্বার সিরিজ : ১, ১, ২, ৩, ৫, ৮, ১৩, ২১, ৩৪ ...। এই সিরিজের মধ্যে থাকা নাম্বারগুলোকেই বলা হয় ফ্যাবোনাচ্চি নাম্বার। লক্ষ করলে দেখা যাবে, এই সিরিজে ৪, ৭, ৯, ১০, ১১, ১২, ১৪, ১৫, ... ইত্যাদি নাম্বারগুলো থাকার কোনো সম্ভাবনা নেই। অতএব এগুলোকে আমরা ফ্যাবোনাচ্চি নাম্বার বলতে পারব না। ফ্যাবোনাচ্চি সিরিজে থাকা সবগুলো সংখ্যাই একেকটি ফ্যাবোনাচ্চি নাম্বার।

তাহলে আমাদের ফ্যাবোনাচ্চি নাম্বার সিরিজটি হচ্ছে :

১, ১, ২, ৩, ৫, ৮, ১৩, ২১, ৩৪, ...।

এখানে এই সংখ্যা সিরিজ থেকে যেকোনো একটি সংখ্যা নিয়ে এর আগের সংখ্যাটি দিয়ে যদি ভাগ করি, তবে আমরা একটি অনুপাত সংখ্যা পাব। যেমন–

৫ ÷ ৩ = ১.৬৬৬৬...   ৮ ÷ ৫ = ১.৬০০০...
১৩ ÷ ৮ = ১.৬২৫০...   ২১ ÷ ১৩ = ১.৬১৫৩৮৪...
৩৪ ÷ ২১ = ১.৬১৯০৪৭...

এখানে লক্ষণীয়, উপরের প্রতিটি অনুপাত সংখ্যা আমাদের সুপরিচিত গোল্ডেন রেশিওর কাছাকাছি। আমরা জানি, গোল্ডেন রেশিও = ১.৬১৮০৩৩৯৮৮৭৪৯৮৯৪৮৪৮২০৪৫৮৬৮...।

এবার দেখা যাক ফ্যাবোনাচ্চি নাম্বার সিরিজ থেকে আরও বড় ছয়টি ক্রমিক ফ্যাবোনাচ্চি নাম্বার নিলে এই অনুপাতের অবস্থাটা কেমন দাঁড়ায়। ২১৭৮৩০৯ থেকে শুরু করে ছয়টি ক্রমিক ফ্যাবোনাচ্চি সংখ্যা হচ্ছে :

২১৭৮৩০৯, ৩৫২৪৫৭৮, ৫৭০২৮৮৭, ৯২২৭৪৬৫, ১৪৯৩০৩৫২, ২৪১৫৭৮১৭

এখন আগের মতো এই সংখ্যা সিরিজ থেকে যেকোনো একটি নিয়ে এর আগের সংখ্যা দিয়ে ভাগ করলে আমরা একেকটি অনুপাত সংখ্যা পাব, যা কার্যত গোল্ডেন রেশিওর প্রায় সমান। এখানে–

৩৫২৪৫৭৮ ÷ ২১৭৮৩০৯ = ১.৬১৮০৩৩৯৮৮৭৪৯৮৮৯০৯৭০৪৭২...
৫৭০২৮৮৭ ÷ ৩৫২৪৫৭৮ = ১.৬১৮০৩৩৯৮৮৭৪৯৮৫৮৮৪৮৩৫০০...
৯২২৭৪৬৫ ÷ ৫৭০২৮৮৭ = ১.৬১৮০৩৩৯৮৮৭৪৯৯০৮৫৯৮৯২৫৪...
১৪৯৩০৩৫২ ÷ ৯২২৭৪৬৫ = ১.৬১৮০৩৩৯৮৮৭৪৯৮৮৯৫৯৫৮৯৬৫...
২৪১৫৭৮১৭ ÷ ১৪৯৩০৩৫২ = ১.৬১৮০৩৩৯৮৮৭৪৯৮৯৬৮৫৪৪০৭৭...

এবার আমরা জানব ব্রাডি নাম্বারের কথা।

আমরা যদি ২৩০৮ এবং ৪২৬১ এই দুইটি সংখ্যা নিয়ে ফ্যাবোনাচ্চি সংখ্যার একটি সিরিজ তৈরি করি, তবে আমরা পাই নিচের সংখ্যাধারা :

২৩০৮, ৪২৬১, ৬৫৬৯, ১০৮৩০, ১৭৩৯৯, ২৮২২৯, ৪৫৬২৮, ৭৩৮৫৭, ১১৯৪৮৫, ১৯৩৩৪২, ৩১২৮২৭, ৫০৬১৬৯, ৮১৮৯৯৬, ১৩২৫১৬৫, ২১৪৪১৬১, ৩৪৬৯৩২৬, ৫৬১৩৪৮৭, ৯০৮২৮১৩, ১৪৬৯৬৩০০, ২৩৭৭৯১১৩, ৩৮৪৭৫৪১৩, ৬২২৫৪৫২৬, ১০০৭২৯৯৩৯, ১৬২৯৮৪৪৬৫, ২৬৩৭১৪৪০৪, ৪২৬৬৯৮৮৬৯, ৬৯০৪১৩২৭৩, ১১১৭১১২১৪২, ১৮০৭৫২৫৪১৫, ২৯২৪৬৩৭৫৫৭, ৪৭৩২১৬২৯৭২, ৭৬৫৬৮০০৫২৯, ...।

এসব প্রতিটি সংখ্যার ক্ষেত্রে এর আগের সংখ্যাটির অনুপাত বের করলে যা পাওয়া যাবে, তা মোটামুটি গোল্ডেন রেশিওর সমান হবে। এগুলোকে বলা হয় ব্রাডি নাম্বার। মনে রাখতে হবে, ব্রাডি নাম্বার সিরিজের শুরু ২৩০৮ ও ৪২৬১ দিয়ে।

গণিতের ভাষায়–

ব্রাডি নাম্বার = সিরিজে এর আগের নাম্বার + তারও আগের নাম্বার, যে সিরিজ শুরু ২৩০৮ ও ৪২৬১ দিয়ে। আর এই সিরিজ গঠিত ফ্যাবোনাচ্চি সিরিজ গঠনের নিয়ম অনুসারে। গণিতের ভাষায় বলতে পারি–

ক-তম ব্রাডি নাম্বার = (ক-১)তম ব্রাডি নাম্বার + (ক-২)তম ব্রাডি নাম্বার।

— গণিতদাদু