

গণিতের অলিগলি

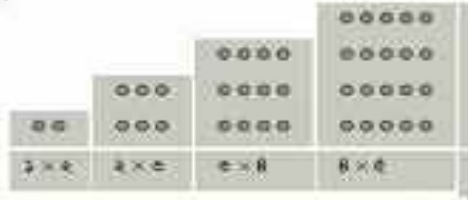
পর্ব : ১২৮

প্রোনিক নাম্বার এবং জিয়োডো নাম্বার

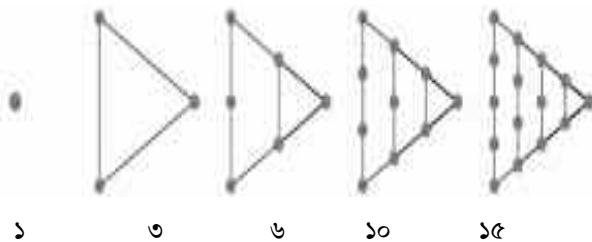
এমন কিছু সংখ্যা আছে যেগুলোকে দুইটি ক্রমিক সংখ্যার গুণফল আকারে প্রকাশ করা যায়। এসব সংখ্যাকে বলা হয় প্রোনিক নাম্বার (Pronic Number)। যেমন- ১২ একটি প্রোনিক নাম্বার। কারণ, $১২ = ৩ \times ৪$ । তেমনি ২ ও ৬ প্রোনিক নাম্বার। কেননা, $২ = ১ \times ২$ এবং $৬ = ২ \times ৩$ । আবার যেহেতু $৬ \times ৭ = ৪২$, তাই ৪২ও একটি প্রোনিক নাম্বার। সবিশেষ লক্ষণীয়, শূন্য (০) সংখ্যাটিও একটি প্রোনিক নাম্বার। কারণ, $০ = ০ \times ১$ । সহজেই বোধগম্য যেকোনো প্রোনিক নাম্বারকে আমরা ক (ক+১) আকারে প্রকাশ করতে পারি, যেখানে ক একটি পূর্ণ সংখ্যা। এই প্রোনিক সংখ্যা অসংখ্য। প্রথম দিকের কয়েকটি প্রোনিক সংখ্যা হচ্ছে- ০, ২, ৬, ১২, ৩০, ৪২, ৫৬, ৭২, ৯০, ১১০, ১৩২, ১৫৬, ১৮২, ২১০, ২৪০, ২৭২, ৩০৬, ৩৪২, ৩৮০, ৪২০, ৪৬২, ...।

সেই অ্যারিস্টটলের সময় থেকে এই প্রোনিক নাম্বার নিয়ে মানুষ নানা পরীক্ষা-নিরীক্ষা করে আসছে। এটি oblong number, heteromecic number, rectangular number ইত্যাদি নামেও পরিচিত। অনেকেই মনে করেন pronic নামটি সম্ভবত promic শব্দের ভুল বানানে রূপান্তরিত হয়েছে। কারণ, promic শব্দটি আসলে এসেছে গ্রিক শব্দ promekes থেকে, যার অর্থ rectangular, oblate, or oblong। কিন্তু বড় মাপের সুইস গণিতবিদ-পদার্থবিদ-যুক্তিবাদী লিওসার্ড ইউলার, যিনি গণিতে অনেক গুরুত্বপূর্ণ আবিষ্কার-উদ্ভাবন রেখেছেন, তিনি যেখানে 'প্রোনিক' শব্দটি ব্যবহার করেছেন, সেখানে আর কেউ সাহস দেখাননি এর বানান শুদ্ধ করার উদ্যোগ নিতে।

কম্পোজিট নাম্বার বোঝাতেও রেকটেন্ডুলার নাম্বার কথাটি ব্যবহার হয়। কারণ, এগুলোকে রেকটেন্ডুল ফিগার তথা আয়তাকার চিত্রের আকারে প্রকাশ করা যায়। নিচে প্রোনিক নাম্বার ২, ৬, ১২ ও ২০-এর আয়তাকার চিত্র দেয়া হলো। এভাবে প্রতিটি প্রোনিক নাম্বারকে একরূপ আয়তাকার চিত্রে প্রকাশ করা যেতে পারে।



আবার যেসব সংখ্যাকে একটি সমবাহু ত্রিভুজ চিত্রের আকারে বা ট্রায়ান্ডুলার ফিগার আকারে সাজানো যায়, সেগুলোকে বলা হয় ট্রায়ান্ডুলার নাম্বার। যেমন- ১, ৩, ৬, ১০, ১৫, ২১, ... ইত্যাদি। এই ট্রায়ান্ডুলার সংখ্যা অসংখ্য।



সব প্রোনিক নাম্বার না হলেও কিছু কিছু প্রোনিক নাম্বারের একটি মজার সম্পর্ক আছে। কিছু কিছু প্রোনিক নাম্বারের এমন কতগুলো যথার্থ উৎপাদক বা প্রপার ডিভিজর আছে, যেগুলোর সবকটির যোগফল অথবা অল্প কয়েকটির যোগফল ওই সংখ্যার সমান হয়। আমরা আগেই দেখেছি ৬ একটি প্রোনিক

নাম্বার। আবার ১, ২ ও ৩ হচ্ছে এই ৬-এর যথার্থ উৎপাদক বা প্রপার ডিভিজর, অর্থাৎ এই ১, ২ ও ৩ দিয়ে ৬-কে নিঃশেষে ভাগ করা যায়। একই সাথে লক্ষণীয়, এই উৎপাদকগুলোর সমষ্টি মূল সংখ্যা ৬-এর সমান, অর্থাৎ $৬ = ১ + ২ + ৩$ । আবার আমরা এও জানি ২০ একটি প্রোনিক নাম্বার। আর ১, ৪, ৫ ও ১০ হচ্ছে এই ২০ সংখ্যাটির প্রপার ডিভিজর বা যথার্থ উৎপাদক। আবার $২০ = ১ + ৪ + ৫ + ১০ = ২০$ । এখানে উল্লিখিত যে সম্পর্কটি ৬ ও ২০-এর মধ্যে দেখতে পেলাম, যেসব প্রোনিক নাম্বার এই মজার সম্পর্কটি দেখাতে পারবে, সেগুলোকে বলা হয় pseudoperfect number। যেমন- ১২ একটি জিয়োডোপারফেক্ট নাম্বার। কারণ, এই প্রোনিক নাম্বার ১২-এর তিনটি যথার্থ উৎপাদক হচ্ছে ৬, ৪ ও ২। এবং $৬ + ৪ + ২ = ১২$ ।

একইভাবে ১৮০৬ জিয়োডোপারফেক্ট নাম্বার। এটি একটি প্রোনিক নাম্বারও। কারণ $১৮০৬ = ৪২ \times ৪৩$ । আবার ৯০৩, ৬০২, ২৫৮, ৪২ ও ১ এই সংখ্যাটির যথার্থ উৎপাদক এবং এগুলোর সমষ্টি অর্থাৎ $৯০৩ + ৬০২ + ২৫৮ + ৪২ + ১ = ১৮০৬$ । অতএব ১৮০৬ একটি জিয়োডোপারফেক্ট নাম্বার।

এভাবে দেখা গেছে, প্রথম দিকে কয়েকটি জিয়োডোপারফেক্ট নাম্বার হচ্ছে- ৬, ১২, ১৮, ২০, ২৪, ২৮, ৩০, ৩৬, ৪২, ১৮০৬, ৪৭০৫৮, ২২১৪৫০২৪২২, ৫২৪৯৫০৯৬৬০২, ৮৪৯০৪২১৫৮৩৫৫৯৬৮৮৮ ১০৭০৬৭১১২৬১০৮৫, ...। এভাবে অসংখ্য জিয়োডোপারফেক্ট নাম্বারের কথা গণিতবিদেরা আমাদের জানিয়েছেন। আরেকটি কথা জানিয়ে রাখি। জিয়োডোপারফেক্ট নাম্বারের আরেক নাম সেমিপারফেক্ট নাম্বার।

জিয়োডোপারফেক্ট নাম্বারের সংজ্ঞাটি আমরা অন্যভাবেও দিতে পারি। এই সংজ্ঞাটির আলোচনায় যাওয়ার আগে সাধারণ পাঠকদের আরেকটি বিষয় সম্পর্কে ধারণা দেয়ার প্রয়োজন বোধ করছি। বিষয়টি হচ্ছে 'রেসিপ্রোকাল নাম্বার'। প্রশ্ন হচ্ছে, জানা দরকার কোনো একটি সংখ্যার রেসিপ্রোকাল নাম্বার কোনটি? কোনো দুইটি সংখ্যার গুণফল যদি ১ হয়, তবে এই সংখ্যা দুইটি পরস্পর রেসিপ্রোকাল, অন্য কথায় একটি আরেকটির রেসিপ্রোকাল। যেমন- $১২ \times ১/১২ = ১$, অতএব আমরা উপরে উল্লিখিত সংজ্ঞামতে বলতে পারি, ১২-এর রেসিপ্রোকাল নাম্বার হচ্ছে ১/১২ এবং ১/১২-এর রেসিপ্রোকাল হচ্ছে ১২। তেমনি ১৯ এবং ১/১৯ একটি অপরটির রেসিপ্রোকাল। একইভাবে ৫/৭ ও ৭/৫ পরস্পর রেসিপ্রোকাল। কারণ $৫/৭ \times ৭/৫ = ১$ । আশা করি, রেসিপ্রোকাল সম্পর্কে ধারণা স্পষ্ট হয়েছে। এবার এই রেসিপ্রোকাল নাম্বার কথাটি ব্যবহার করে আমরা জিয়োডোপারফেক্ট নাম্বারের সংজ্ঞা জানার চেষ্টা করব।

এই সংজ্ঞামতে, একটি প্রোনিক নাম্বারকে আমরা তখনই জিয়োডোপারফেক্ট নাম্বার বলব, যখন এই সংখ্যার অন্তত এমন কয়েকটি যথার্থ উৎপাদক পাব যেগুলোর রেসিপ্রোকালের সমষ্টির সাথে মূল সংখ্যার রেসিপ্রোকাল যোগ করলে যোগফল সবসময় ১ হবে। যেমন- আমরা এর আগে দেখেছি ১৮০৬ একটি প্রোনিক ও জিয়োডো নাম্বার। এর কয়েকটি যথার্থ উৎপাদক হচ্ছে ২, ৩, ৭ ও ৪৩। এবং এগুলোর রেসিপ্রোকাল নাম্বারগুলো হচ্ছে যথাক্রমে ১/২, ১/৩, ১/৭ ও ১/৪৩। আর মূল সংখ্যা ১৮০৬-এর রেসিপ্রোকাল নাম্বার হচ্ছে ১/১৮০৬। এখন এই সবগুলো রেসিপ্রোকালের সমষ্টি হচ্ছে $১/২ + ১/৩ + ১/৭ + ১/৪৩ + ১/১৮০৬ = ১$ । অতএব আমরা বলতে পারি, ১৮০৬ একটি জিয়োডোপারফেক্ট নাম্বার।

আরেকটি উদাহরণ দেখা যাক। আমরা আগে দেখেছি ২০ একটি প্রোনিক নাম্বার। কারণ $২০ = ৪ \times ৫$ । আবার ২, ৪, ৫ হচ্ছে ২০-এর এক-একটি উৎপাদক। এগুলোর রেসিপ্রোকাল হচ্ছে যথাক্রমে $\frac{১}{২}, \frac{১}{৪}, \frac{১}{৫}$ এবং ২০-এর রেসিপ্রোকাল হচ্ছে $\frac{১}{২০}$ । এখন এই সবগুলো রেসিপ্রোকালের যোগফল = $\frac{১}{২} + \frac{১}{৪} + \frac{১}{৫} + \frac{১}{২০} = \frac{১০ + ৫ + ৪}{২০} = \frac{২০}{২০} = ১$ । \therefore ২০ একটি জিয়োডোপারফেক্ট নাম্বার।

গণিতদাদু