

# গণিতের অলিগলি

পর্ব : ১৫৩

## প্রতিযোগিতামূলক পরীক্ষায় বীজগণিতের বিশেষ ধরনের প্রশ্নের কৌশলী সমাধান

পর্ব : ০১

আমরা সাধারণত দেখি, বিভিন্ন ধরনের প্রতিযোগিতামূলক পরীক্ষায় বীজগণিতে বিশেষ ধরনের কিছু প্রশ্ন থাকে। এ ধরনের প্রশ্নে উত্তর দেয়ার কৌশলটা জানা থাকলে সেসব প্রশ্নের সঠিক সমাধান খুব অল্প সময়ে দেয়া যায়। শুধু মাথা খাটিয়ে এর সমাধান মিলবে না। আমরা এখানে সেই কৌশলটাই জানব। প্রথমেই দেখা যাক, এই বিশেষ ধরনের প্রশ্নের নমুনাটা কেমন—

প্রশ্ন-০১ : যদি  $x + 1/x = 1$  হয়, তবে

$x^{60} + 1/x^{60} =$  কত?,  $x^{36} + 1/x^{36} =$  কত?,  $x^{35} + 1/x^{35} =$  কত? এবং  $x^{46} + 1/x^{46} =$  কত?

প্রশ্ন-০২ : যদি  $x + 1/x = -1$  হয়, তবে

$x^{60} + 1/x^{60} =$  কত?,  $x^{36} + 1/x^{36} =$  কত?,  $x^{35} + 1/x^{35} =$  কত? এবং  $x^{46} + 1/x^{46} =$  কত?

লক্ষণীয়, উভয় প্রশ্নে একই রাশিমালার মান বের করতে চাওয়া হয়েছে। তবে প্রথম প্রশ্নের শর্ত এবং দ্বিতীয় প্রশ্নের শর্ত একটু আলাদা। প্রথম প্রশ্নে শর্ত দেয়া হয়েছে  $x + 1/x = 1$  এবং দ্বিতীয় প্রশ্নের শর্ত হচ্ছে  $x + 1/x = -1$ । প্রশ্ন দুইটির মধ্যে পার্থক্য শুধু এখানেই। আর এই পার্থক্যটুকু মনে রাখতে হবে সচেতনভাবে।

এ ধরনের প্রশ্নের সমাধানের বেলায় কৌশলটি হলো, যখন শর্তটি  $x + 1/x = 1$  থাকে, তখন প্রথমেই সরাসরি আমরা বলব— যদি  $x + 1/x = 1$  হয়, তবে  $x^3 = -1$ । আর যদি শর্তটি হয়  $x + 1/x = -1$ , তখন আমরা সরাসরি ধরে নেব  $x^3 = 1$ । শর্ত অনুযায়ী  $x^3$ -এর এই মান বসিয়ে প্রদত্ত রাশির মান বের করতে হবে।

তাহলে ১ নম্বর প্রশ্নের বেলায় আমাদেরকে  $x^3$ -এর মান ধরতে হবে  $-1$ , দ্বিতীয় প্রশ্নের সমাধানের বেলায়  $x^3$ -এর মান ধরতে হবে  $+1$ ।

### প্রথম প্রশ্নের সমাধান

দেয়া আছে,  $x + 1/x = 1$ , অতএব,  $x^3 = -1$ । এখন—

$$x^{60} + 1/x^{60} = (x^3)^{20} + 1/(x^3)^{20}$$

$$= (-1)^{20} + 1/(-1)^{20} \quad [x^3 = -1 \text{ বসিয়ে}]$$

$$= 1 + 1/1$$

$$= 2 \text{ (Answer)}$$

$$x^{36} + 1/x^{36} = (x^3)^{12} + 1/(x^3)^{12}$$

$$= (-1)^{12} + 1/(-1)^{12} \quad [x^3 = -1 \text{ বসিয়ে}]$$

$$= 1 + 1/1$$

$$= 2 \text{ (Answer)}$$

$$x^{35} + 1/x^{35} = x^{33} \cdot x^2 + 1/x^{33} \cdot x^2$$

$$= (x^3)^{11} \cdot x^2 + 1/(x^3)^{11} \cdot x^2$$

$$= (-1)^{11} \cdot x^2 + 1/(-1)^{11} \cdot x^2 \quad [x^3 = -1 \text{ বসিয়ে}]$$

$$= -x^2 - 1/x^2$$

$$= -(x^2 + 1/x^2)$$

$$= -(x^2 + 1/x^2 + 2 - 2)$$

$$= -(x^2 + 1/x^2 + 2) + 2$$

$$= -(x + 1/x)^2 + 2$$

$$= -1^2 + 2$$

$$[\text{দেয়া আছে, } x + 1/x = 1]$$

$$= 1 \text{ (Answer)}$$

$$x^{46} + 1/x^{46} = x^{45} \cdot x + 1/x^{45} \cdot x$$

$$= (x^3)^{15} \cdot x + 1/(x^3)^{15} \cdot x$$

$$= (-1)^{15} \cdot x + 1/(-1)^{15} \cdot x \quad [\text{কারণ } x^3 = -1]$$

$$= -x - 1/x$$

$$= -(x + 1/x)$$

$$= -1 \text{ (Answer)}$$

$$[\text{দেয়া আছে, } x + 1/x = 1]$$

### দ্বিতীয় প্রশ্নের সমাধান

দেয়া আছে,  $x + 1/x = -1$ , অতএব সরাসরি বলতে পারি  $x^3 = 1$ । এখন,

$$x^{60} + 1/x^{60} = (x^3)^{20} + 1/(x^3)^{20}$$

$$= (1)^{20} + 1/(1)^{20} \quad [x^3 = 1 \text{ বসিয়ে}]$$

$$= 1 + 1/1$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2 \text{ (Answer)}$$

$$x^{36} + 1/x^{36} = (x^3)^{12} + 1/(x^3)^{12}$$

$$= (1)^{12} + 1/(1)^{12} \quad [x^3 = 1 \text{ বসিয়ে}]$$

$$= 1 + 1/1$$

$$= 2 \text{ (Answer)}$$

$$x^{35} + 1/x^{35} = x^{33} \cdot x^2 + 1/x^{33} \cdot x^2$$

$$= (x^3)^{11} \cdot x^2 + 1/(x^3)^{11} \cdot x^2$$

$$= (1)^{11} \cdot x^2 + 1/(1)^{11} \cdot x^2 \quad [x^3 = 1 \text{ বসিয়ে}]$$

$$= x^2 + 1/x^2$$

$$= (x^2 + 1/x^2 + 2 - 2)$$

$$= (x^2 + 1/x^2 + 2) - 2$$

$$= (x + 1/x)^2 - 2$$

$$= (-1)^2 - 2$$

$$[\text{দেয়া আছে, } x + 1/x = -1]$$

$$= 1 - 2$$

$$= -1 \text{ (Answer)}$$

$$x^{46} + 1/x^{46} = x^{45} \cdot x + 1/x^{45} \cdot x$$

$$= (x^3)^{15} \cdot x + 1/(x^3)^{15} \cdot x$$

$$= (1)^{15} \cdot x + 1/(1)^{15} \cdot x \quad [\text{কারণ } x^3 = 1]$$

$$= x + 1/x$$

$$= -1 \text{ (Answer)}$$

$$[\text{দেয়া আছে, } x + 1/x = -1]$$

### জেনে রাখি

গুরুত্বই উল্লেখ করা হয়েছে,  $x + 1/x = 1$  হলে, আমরা সরাসরি বলতে পারি  $x^3 = -1$ । প্রশ্ন হচ্ছে, কী করে তা বলতে পারি? দেখা যাক কেনো তা বলতে পারি। আমাদের শর্ত হচ্ছে—

$$x + 1/x = 1$$

$$\text{অথবা, } x^2 + 1 = x \quad (\text{উভয় পক্ষকে } x \text{ দিয়ে গুণ করে})$$

$$\text{অথবা, } x^2 - x + 1 = 0$$

$$\text{অথবা, } (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$\text{অথবা, } (x+1)(x^2 - x \cdot 1 + 1^2) = 0$$

$$\text{অথবা, } x^3 + 1^3 = 0, \text{ (সূত্র : } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2))$$

$$\text{অথবা, } x^3 + 1 = 0$$

$$\text{অথবা, } x^3 = -1$$

একইভাবে আমরা প্রমাণ করতে পারি,  $x + 1/x = -1$  হলে,  $x^3 = 1$

যেমন শর্ত হচ্ছে

$$x + 1/x = -1$$

$$\text{আবার } x^2 + 1 = -x \quad (\text{উভয় পক্ষকে } x \text{ দিয়ে গুণ করে})$$

$$\text{অথবা, } x^2 + x + 1 = 0$$

$$\text{অথবা, } (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\text{অথবা, } x^3 - 1^3 = 0$$

$$\text{অথবা, } x^3 - 1 = 0$$

$$\therefore x^3 = 1$$